Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

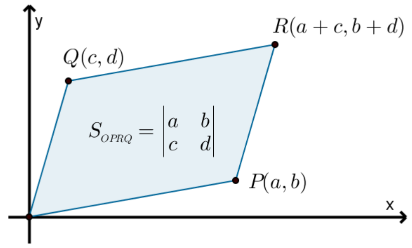
Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Determinanten

1. ★★★ Een vraagje in verband met de meetkundige interpretatie van een 2×2-determinant:

   a) Bewijs dat de oppervlakte van het parallellogram bepaald door de punten $O(0,0)$, $P(a,b)$, $R(a+c,b+d)$ en $Q(b,d)$ kan berekend worden met de (absolute waarde van de) 2×2-determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.



   b) Interpreteer nu de eigenschappen die we gezien hebben voor determinanten meetkundig:

      - Een determinant met twee gelijke of evenredige rijen is 0.

2. ★⋆ Bereken de determinant van de circulante matrix $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

3. ★★ Bereken de volgende determinant door verlaging van de orde: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4. ★★ Toon met behulp van de gekende eigenschappen aan dat $\forall a,b\in\mathbb{R}:\begin{vmatrix} 1 & a-1 & b(a+1) \\ 2 & 2a-1 & b(2a+1) \\ 3 & 3a-1 & b(3a+1) \end{vmatrix}=0$.

5. ★★★ Geef een ontbinding in factoren van de determinant $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-y & a+y \\ a-x & a-y & a+y & a+x \\ a-y & a+y & a+x & a-x \\ a+y & a+x & a-x & a-y \end{vmatrix}$.

6. ★★ Los de volgende vergelijking op naar de onbekende x ($a\in\mathbb{R}$ is een parameter): $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}=0$.

7. ★★⋆ Zijn de volgende stellingen waar? Indien waar, bewijs ze dan. Indien vals, geef dan een tegenvoorbeeld.

   a) $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\det(-A)=-\det A$

   b) Als A regulier is dan is $\det\left(A^{-1}\right)=(\det A)^{-1}$

8. ★⋆ Bewijs: $\forall A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\det A+\det B=\frac{1}{2}\left(\det(A+B)+\det(A-B)\right)$

Veel succes!

Antwoorden (moeilijkheidsgraad ★: eenvoudig, ★★: gemiddeld, ★★★: lastig, ★★★★: erg moeilijk)

1.	a) Gebruik analytische meetkunde (afstand punt-punt voor basis en punt-rechte voor hoogte) b) Het parallellogram is dan geen parallellogram meer.
2.	$a^3+b^3+c^3-3abc$
3.	160
4.	Zet eerst b voorop uit de derde kolom en tel dan de tweede en derde kolom bij elkaar op. Je krijgt dan een determinant met twee evenredige kolommen.
5.	$-16a(x+y)^2(x-y)$
6.	$V=\{a,-2a\}$
7.	a) Enkel waar als n oneven is (bedenk eerst dat geldt $\det(k.A)=k^n.\det A$) b) Waar (gebruik de eigenschap van de determinant van een product).
8.	Stel $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ en reken beide leden uit.