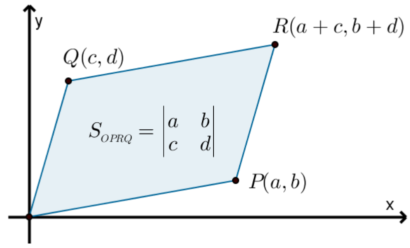
1. ★★★ Een vraagje in verband met de meetkundige interpretatie van een $2\times 2$-determinant:

a) Bewijs dat de oppervlakte van het parallellogram bepaald door de punten $O(0,0)$, $P(a,b)$, $R(a+c,b+d)$ en $Q(b,d)$ kan berekend worden met de (absolute waarde van de) $2\times 2$-determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.




Nemen we $[OP]$ als basis van het parallellogram dan is $|OP| = \sqrt{a^2+b^2}$

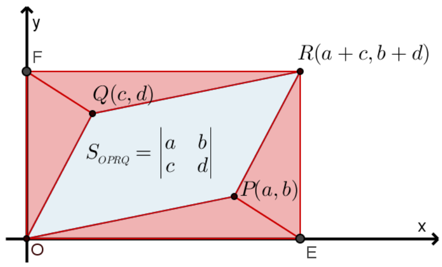
De rechte $OP$ heeft als vergelijking $ay - bx = 0$, dus de hoogte van het parallellogram kunnen we berekenen met de afstandsformule punt-rechte: $d(OP,Q) = \dfrac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

De oppervlakte is dus wel degelijk $|ad-bc|$, de absolute waarde van de gegeven determinant.

*Alternatieve methode:*

Noem $E(a+c,0)$ en $F(0,b+d)$ de loodrechte projecties van $R$ op de $x$- en de $y$-as. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
&S_{\square OPRQ} \\
&= S_{\square OERF} - S_{\Delta OEP} - S_{\Delta ERP} - S_{\Delta RFQ} - S_{\Delta FOQ} \\
&= (a+c)(b+d) - \frac{(a+c)b}{2} - \frac{(b+d)c}{2} - \frac{(a+c)b}{2} - \frac{(b+d)c}{2} \\
&= ad - bc
\end{aligned}$$




Naargelang de ligging van de punten $P$ en $Q$ kan dit negatief zijn, dus moeten we nog de absolute waarde nemen van deze uitkomst (gezien het een oppervlakte betreft).

b) Interpreteer nu de eigenschappen die we gezien hebben voor determinanten meetkundig:

- Een determinant met twee gelijke rijen is 0.
  Dan zijn de punten $P$ en $Q$ gelijk en is de oppervlakte van het parallellogram dus 0.
- Een determinant met twee evenredige rijen is 0.
  Dan zou de coördinaat van $Q$ een veelvoud zijn van de coördinaat van $P$ en dan zijn de punten $O, P$ en $Q$ collineair. De oppervlakte van het parallellogram is dan ook 0.

2. ★★ Bereken de determinant van de circulante matrix $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

Met de regel van Sarrus: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-abc-abc-abc = a^3+b^3+c^3-3abc$

3. ★★ Bereken de volgende determinant door verlaging van de orde: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1}{\underset{\substack{R_3-3R_1\\R_4-4R_1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1}{\underset{R_3-7R_2}{=}} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} \overset{R_2+R_1}{=} -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 40 \end{vmatrix} = 160$$

4. ★★ Toon aan dat $\forall a,b \in \mathbb{R}: \begin{vmatrix} 1 & a-1 & b(a+1) \\ 2 & 2a-1 & b(2a+1) \\ 3 & 3a-1 & b(3a+1) \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 & b(a+1) \\ 2 & 2a-1 & b(2a+1) \\ 3 & 3a-1 & b(3a+1) \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 1 & a-1 & a+1 \\ 2 & 2a-1 & 2a+1 \\ 3 & 3a-1 & 3a+1 \end{vmatrix} \overset{K_2+K_3}{=} b\begin{vmatrix} 1 & 2a & a+1 \\ 2 & 4a & 2a+1 \\ 3 & 6a & 3a+1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (want } K_2 = 2a.K_1\text{)}$$

5. ★★★ Geef een ontbinding in factoren van de determinant $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-y & a+y \\ a-x & a-y & a+y & a+x \\ a-y & a+y & a+x & a-x \\ a+y & a+x & a-x & a-y \end{vmatrix}$.

$$\overset{R_3-R_1}{\underset{R_4-R_2}{=}} \begin{vmatrix} a+x & a-x & a-y & a+y \\ a-x & a-y & a+y & a+x \\ -x-y & x+y & x+y & -x-y \\ x+y & x+y & -x-y & -x-y \end{vmatrix} = (x+y)^2 \begin{vmatrix} a+x & a-x & a-y & a+y \\ a-x & a-y & a+y & a+x \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y)^2 \begin{vmatrix} a+x & a-x & a-y & a+y \\ a-x & a-y & a+y & a+x \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{K_1+K_3}{\underset{K_2+K_4}{=}} (x+y)^2 \begin{vmatrix} 2a+x-y & 2a-x+y & a-y & a+y \\ 2a-x+y & 2a+x-y & a+y & a+x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{K_1+K_2}{=} (x+y)^2 \begin{vmatrix} 4a & 2a-x+y & a-y & a+y \\ 4a & 2a+x-y & a+y & a+x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4a(x+y)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2a-x+y & a-y & a+y \\ 1 & 2a+x-y & a+y & a+x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_4+R_3}{=} 4a(x+y)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2a-x+y & a-y & a+y \\ 1 & 2a+x-y & a+y & a+x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8a(x+y)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2a-x+y \\ 1 & 2a+x-y \end{vmatrix}$$

$$= -16a(x+y)^2(x-y)$$

6. ★★ Los de volgende vergelijking op naar de onbekende $x$ ($a \in \mathbb{R}$ is een parameter): $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + a^3 + a^3 - a^2x - a^2x - a^2x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \overset{Horner}{\Leftrightarrow} (x-a)^2(x+2a) = 0 \Leftrightarrow x = a \vee x = -2a$$

$V = \{a, -2a\}$

7. ★★★ Zijn de volgende stellingen waar of vals? Indien waar, bewijs ze dan. Indien vals, geef dan een tegenvoorbeeld.

a) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(-A) = -\det A$

Merk op dat geldt: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(k.A) = k^n.\det A$, want je kan de factor $k$ in elke rij (of kolom) vooropzetten zodat je eigenlijk $k^n$ voorop zet. Dus:

$\det(-1.A) = (-1)^n.\det A$, de stelling klopt enkel als $n$ oneven is.

b) Als $A$ regulier is dan is $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

$$A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow \det(A^{-1} \cdot A) = \det I \Rightarrow \det(A^{-1}).\det A = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1} \quad \square$$

8. ★★ Bewijs: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det A + \det B = \frac{1}{2}(\det(A+B) + \det(A-B))$.

Stel $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, dan is $LL = \det A + \det B = ad - bc + eh - fg$ en

$$\det(A+B) = \det\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) = ad + ah + de + eh - bc - bg - cf - fg,$$

$$\det(A-B) = \det\left(\begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}\right) = ad - ah - de + eh - bc + bg + cf - fg,$$

dus $RL = \frac{1}{2}(\det(A+B) + \det(A-B)) = \frac{1}{2}(2ad + 2eh - 2bc - 2fg) = ad + eh - bc - fg \quad \square$