Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Determinanten - toepassingen

1. ★★★ Bespreek het stelsel met behulp van de methode van Cramer: $\begin{cases} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases}$.

2. ★ Los het 2×3-stelsel op met behulp van determinanten: $\begin{cases} 2x-3y+4z=0 \\ 4x-2y+z=0 \end{cases}$.

3. ★★ Bepaal voor welke waarde(n) van k de rechten a, b en c concurrent zijn:

$$a \leftrightarrow 3x-4y+2=0,\ b \leftrightarrow 2x+ky-5=0 \text{ en } c \leftrightarrow x+y-8k=0.$$

   Bepaal in beide gevallen ook het snijpunt van de rechten.

4. ★★ Bewijs dat dit stelsel met $m\in\mathbb{R}$ nooit oplossingen naast de nuloplossing heeft: $\begin{cases} 2mx+3y+6z=0 \\ 9x+my+mz=0 \\ mx+15y+18z=0 \end{cases}$.

5. ★★★ Voor welke waarden van $m\in\mathbb{R}$ zal het stelsel onbepaald zijn $\begin{cases} (2m-1)x+y+2mz+3u=0 \\ 2x+2my+z+(2m-2)u=0 \\ 2mx+2y-z+4u=0 \\ 2x-2my+3z+(6-2m)u=0 \end{cases}$?

6. ★★ Elimineer x en y uit de volgende vergelijkingen: $\begin{cases} 4x-y=a \\ ax-y=0 \\ x+by=0 \end{cases}$. Wat betekent dit?

7. ★★ Elimineer x, y en z uit de volgende vergelijkingen: $\begin{cases} 4mx+3ny=0 \\ 2x-mz=0 \\ y+nz=0 \end{cases}$. Wat betekent dit?

8. We noemen $\vec{v}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ een *eigenvector* van de vierkante matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ met bijhorende *eigenwaarde* $\lambda\in\mathbb{R}$ als en slechts als $A\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$ (met $\vec{v}$ verschillend van de nulvector).

   a) ★★ Toon aan dat het gestelde equivalent is met $(A-\lambda I)\vec{v}=O$.

   b) ★★ Beredeneer dat eigenvectoren slechts op een reëel veelvoud na bepaald zijn.

   c) ★★ Beredeneer dat $\lambda\in\mathbb{R}$ een eigenwaarde is als en slechts als $\det(A-\lambda I)=0$.

   d) ★★★ Bereken de eigenwaarden van de matrix $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ en hun bijhorende eigenvectoren.

(Eigenwaarden en eigenvectoren spelen een hele grote rol in verschillende takken van de wiskunde, fysica, biologie en tal van andere wetenschappen.)

Veel succes!

Antwoorden (moeilijkheidsgraad ★: eenvoudig, ★★: gemiddeld, ★★★: lastig, ★★★★: erg moeilijk)

1.	$m=1 \rightarrow V=\varnothing$ $m\neq 1 \rightarrow V=\left\{\left(\frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m},\frac{m}{1-m},m^2+m\right)\right\}$
2.	$V=\left\{\left(5\lambda,14\lambda,8\lambda\right) \parallel \lambda\in\mathbb{R}\right\}$
3.	Als $k=\frac{1}{2}$ is het snijpunt van de rechten $P\left(2,2\right)$. Als $k=-\frac{13}{4}$ is het snijpunt $P\left(\frac{80}{7},\frac{102}{7}\right)$.
4.	Tip: bewijs dat de determinant van de coëfficiëntenmatrix nooit nul kan zijn.
5.	$m=2 \vee m=-\frac{1}{2} \vee m=-1$
6.	Als $a\left(ab+1\right)=0$ dan heeft het stelsel minstens één oplossing.
7.	Als $4m^2-6n^2=0$ dan heeft het stelsel oplossingen verschillend van de nuloplossing.
8.	a) Tip: gebruik eenvoudige eigenschappen van matrices. b) Tip: gebruik eenvoudige eigenschappen van matrices. c) Tip: beschouw wat je bewezen hebt in (a) als een homogeen stelsel. d) $\vec{v}=\begin{bmatrix}-4k\\k\end{bmatrix}$, met $k\in\mathbb{R}_0$ is de eigenvector die hoort bij eigenwaarde 1. $\vec{v}=\begin{bmatrix}k\\k\end{bmatrix}$, met $k\in\mathbb{R}_0$ is de eigenvector die hoort bij eigenwaarde 6.