1. ★★* Bespreek het stelsel met behulp van de methode van Cramer: $\begin{cases} x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases}$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+m+m(m-1)-1-m^2-(m-1)=1-m$$

Geval 1: $m=1$ $\rightarrow$ het stelsel is vals (bekijk de eerste en laatste vergelijking). $V=\varnothing$

Geval 2: $m\neq 1$ $\rightarrow$ dan is het stelsel bepaald en is $V=\left\{\left(\dfrac{m^3-m^2-2m+1}{1-m},\dfrac{m}{1-m},m^2+m\right)\right\}$, want:

$$\det A_1=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+m(m+1)(m-1)+m-(m+1)-m^2-(m-1)=m^3-m^2-2m+1,$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & m-1 \\ 1 & m+1 & 1 \end{vmatrix}\overset{K_2-K_1}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 0 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=-m\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m-1 \end{vmatrix}=m,$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix}\overset{K_3-K_1}{=}\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix}=m(1-m^2)=m(1-m)(1+m),$$

dus $x=\dfrac{\det A_1}{\det A}=\dfrac{m^3-m^2-2m+1}{1-m}$, $y=\dfrac{\det A_2}{\det A}=\dfrac{m}{1-m}$ en $z=\dfrac{\det A_3}{\det A}=m^2+m$

2. ★ Los het 2×3-stelsel op met behulp van determinanten: $\begin{cases} 2x-3y+4z=0 \\ 4x-2y+z=0 \end{cases}$

$$V=\left\{\left(\lambda\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},-\lambda\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},\lambda\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right) \parallel \lambda\in\mathbb{R}\right\}=\{(5\lambda,14\lambda,8\lambda)\parallel \lambda\in\mathbb{R}\}$$

3. ★* Bepaal voor welke waarde(n) van k de rechten a, b en c concurrent zijn:

$$a\leftrightarrow 3x-4y+2=0,\ b\leftrightarrow 2x+ky-5=0 \text{ en } c\leftrightarrow x+y-8k=0$$

Bepaal in beide gevallen ook het snijpunt van de rechten.

Dan heeft het 3×2-stelsel $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ 2x+ky-5=0 \\ x+y-8k=0 \end{cases}$ een unieke oplossing. Dan moet $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & k & -5 \\ 1 & 1 & -8k \end{vmatrix}=0$, dus

$$-24k^2+4+20-2k+15-64k=0 \Leftrightarrow -24k^2-66k+39=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2} \vee k=-\frac{13}{4}$$

Als $k=\dfrac{1}{2}$ is het snijpunt van de rechten $P(2,2)$. Als $k=-\dfrac{13}{4}$ is het snijpunt $P\left(\dfrac{80}{7},\dfrac{102}{7}\right)$.

4. ★★ Bewijs dat dit stelsel voor geen enkele $m \in \mathbb{R}$ nog oplossingen naast de nuloplossing zal hebben:

$$\begin{cases} 2mx + 3y + 6z = 0 \\ 9x + my + mz = 0 \\ mx + 15y + 18z = 0 \end{cases}$$

$\det A = \begin{vmatrix} 2m & 3 & 6 \\ 9 & m & m \\ m & 15 & 18 \end{vmatrix} = 36m^2 + 810 + 3m^2 - 6m^2 - 30m^2 - 486 = 3m^2 + 324$, dit is altijd positief.

5. ★★★ Voor welke waarde(n) van parameter $m \in \mathbb{R}$ zal het stelsel onbepaald zijn:

$$\begin{cases} (2m-1)x + y + 2mz + 3u = 0 \\ 2x + 2my + z + (2m-2)u = 0 \\ 2mx + 2y - z + 4u = 0 \\ 2x - 2my + 3z + (6-2m)u = 0 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2m-1 & 1 & 2m & 3 \\ 2 & 2m & 1 & 2m-2 \\ 2m & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2m & 3 & 6-2m \end{vmatrix} \overset{R_4+R_2}{=} \begin{vmatrix} 2m-1 & 1 & 2m & 3 \\ 2 & 2m & 1 & 2m-2 \\ 2m & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{K_1-K_4 \\ K_3-K_4}}{=} \begin{vmatrix} 2m-4 & 1 & 2m-3 & 3 \\ 4-2m & 2m & 3-2m & 2m-2 \\ 2m-4 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4(2m-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-3 \\ -1 & 2m & 3-2m \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \overset{R_2+R_1}{=} 4(2m-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-3 \\ 0 & 2m+1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 8(m-2)(2m+1)\begin{vmatrix} 1 & 2m-3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 8(m-2)(2m+1)(-2m-2) \to \det A = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = 2 \vee m = -\frac{1}{2} \vee m = -1}$$

6. ★★ Elimineer x en y uit de volgende vergelijkingen: $\begin{cases} 4x - y = a \\ ax - y = 0 \\ x + by = 0 \end{cases}$.

Wat is de betekenis van de vergelijking die je uitkomt?

$\det A_b = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(ab+1) = 0$. Als dit geldt heeft het stelsel minstens één oplossing.

7. ★★ Elimineer x, y en z uit de volgende vergelijkingen: $\begin{cases} 4mx + 3ny = 0 \\ 2x - mz = 0 \\ y + nz = 0 \end{cases}$.

Wat is de betekenis van de vergelijking die je uitkomt?

$\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4m & 3n & 0 \\ 2 & 0 & -m \\ 0 & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 6n^2 = 0$. Als dit geldt dan heeft het stelsel oplossingen verschillend van de nuloplossing.

8. We noemen $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ een *eigenvector* van de vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met bijhorende *eigenwaarde* $\lambda \in \mathbb{R}$ als en slechts als $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ (met $\vec{v}$ verschillend van de nulvector).

a) ★* Toon aan dat het gestelde equivalent is met $(A-\lambda I)\vec{v} = O$.

$$(A-\lambda I)\vec{v} = O \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = O \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = O \Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

b) ★* Beredeneer dat eigenvectoren slechts op een reëel veelvoud na bepaald zijn.

Als $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ dan zal ook $\forall k \in \mathbb{R} : A \cdot k \cdot \vec{v} = \lambda \cdot k \cdot \vec{v}$, dus als $\vec{v}$ een eigenvector is, dan is ook $k \cdot \vec{v}$ een eigenvector (met $k \in \mathbb{R}_0$).

c) ★★ Beredeneer dat $\lambda \in \mathbb{R}$ een eigenwaarde is als en slechts als $\det(A-\lambda I) = 0$.

De voorwaarde $(A-\lambda I)\vec{v} = O$ kan je opvatten als een homogeen $n \times n$-stelsel. Dit zal oplossingen hebben verschillend van de nulvector als en slechts als de determinant van de coëfficiëntenmatrix nul is.

d) ★★* Bereken de eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ en hun bijhorende eigenvectoren.

Het getal $\lambda \in \mathbb{R}$ is een eigenwaarde als en slechts als:

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 6$$

Is $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de eigenvector bij $\lambda = 1$, dan geldt: $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k \\ y = k \in \mathbb{R} \end{cases}$,

dus $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4k \\ k \end{bmatrix}$, met $k \in \mathbb{R}_0$ is de eigenvector die hoort bij eigenwaarde 1.

is $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de eigenvector bij $\lambda = 6$, dan geldt: $\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k \in \mathbb{R} \end{cases}$.

dus $\vec{v} = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$, met $k \in \mathbb{R}_0$ is de eigenvector die hoort bij eigenwaarde 6.