1. Homer en Apu zetten op 1 januari 2007 elk exact €1000 op een lege rekening. Homer zijn bank biedt de volgende formule aan: elke maand komt er €20 bij (enkelvoudig). Apu spaart volgens een andere formule: elke maand komt er 1,5% bij (samengesteld).

   Vul de tabel aan *(rond bedragen af tot op 1 eurocent)* :

	Homer	Apu
1 januari 2007	1000	1000
1 februari 2007	1020	1015
1 maart 2007	1040	1030,23
1 januari 2008	1240	1195,62
1 januari 2012	2200	2443,22

   a) Stel de functievoorschriften op van beide kapitalen (K_H en K_A) in functie van de tijd t (uitgedrukt in maanden na januari 2007).
   $K_H = 1000 + 20t$ (lineaire groei), $K_A = 1000.1{,}015^t$ (exponentiele groei).

   b) Wat is bij Apu de rentevoet op jaarbasis (*op 0,01% nauwkeurig*)?
   $a_{maand} = 1{,}015 \Leftrightarrow a_{jaar} = 1{,}015^{12} \approx 1{,}195618171$, dus de jaarlijkse rentevoet is ongeveer 19,56%.

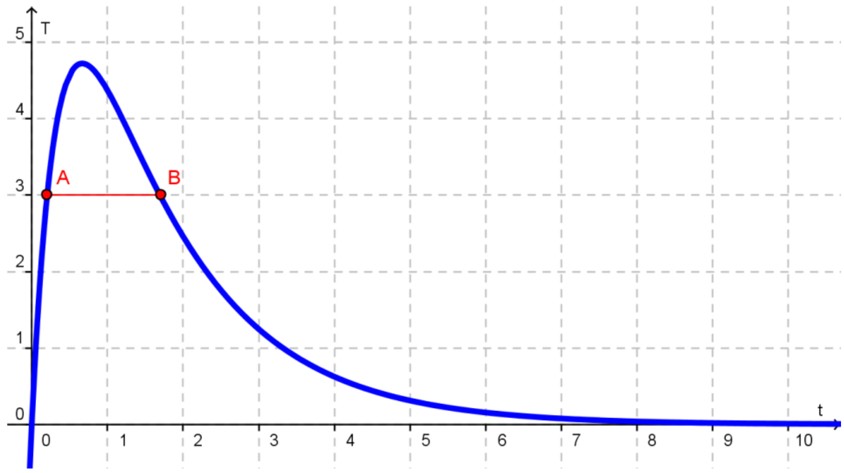
   c) Bepaal grafisch (💻) vanaf wanneer Apu meer dan Homer op zijn rekening zal staan hebben.
   Snijpunt van de grafieken van K_H en K_A is gelegen bij $t \approx 37{,}871052$, als $K_A = K_H \approx 1757{,}421$, dus na 3 jaar en 2 maanden (ervan uitgaande dat de interest er op het einde van de maand bij komt).

2. Bij een migraineaanval wordt de hoofdpijn (intensiteit) uitgedrukt op een schaal van 0 tot 5. Billy heeft een aanval waarbij zijn hoofdpijn gegeven wordt door de functie:

$$I(t) = 10.\left(2^{-t} - 2^{-4t}\right),$$

   met t de tijd in uur na het begin van de aanval (16u), en I de intensiteit van de hoofdpijn. Beantwoord volgende vraagjes met behulp van je rekenmachine. Rond tijdstippen af op de minuut nauwkeurig, en intensiteiten op 0,001 nauwkeurig.

   a) Schets de grafiek van de functie T in volgend assenstelsel:



   b) Wanneer bereikte de aanval zijn hoogtepunt?
   Het maximum op de grafiek is punt $M\left(\frac{2}{3}; 4{,}7247\right)$. Hij bereikt dus zijn hoogtepunt om 16u40.

   c) Wat was de intensiteit van Billy's hoofdpijn om 20u 's avonds (4u na het begin van de aanval)?
   Als $t = 4$ dan is $I = I(4) = 10.\left(2^{-4} - 2^{-16}\right) \approx 0{,}624847$.

   d) Deskundigen noemen hoofdpijn van intensiteit meer dan 3 onwerkbaar. Hoelang verkeerde Billy in deze toestand?
   Dat duurt van $t_A \approx 0{,}20387$ tot $t_B \approx 1{,}693704$, dus in totaal ongeveer 1u29'23"

3. Bij een speciale bloedziekte (amyloidose) beginnen proteïnen in het bloed te muteren, waardoor ze zich gaan opstapelen in organen. Men is te weten gekomen dat eens je de ziekte hebt, er elke maand 2% meer proteïnen gemuteerd raken. Het aantal gemuteerde proteïnen in iemand zijn bloed beschrijft dus een exponentiële functie.

   a) Wat is de gegeven groeifactor per maand (a_{maand})?

   $a_{maand} = 1{,}02$

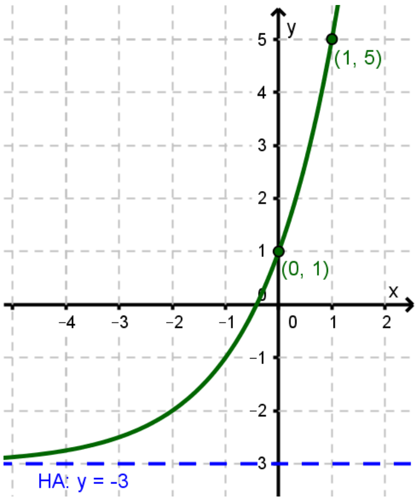
   b) Met hoeveel % neemt het aantal gemuteerde proteïnen toe per jaar ?

   $a_{jaar} = a_{maand}^{12} = 1{,}02^{12} \approx 1{,}2682$, dus een toename met ongeveer 26,82%.

   c) Patiënt Robert heeft nu 10000 gemuteerde proteïnen. Hoeveel proteïnen zullen er gemuteerd zijn binnen 3 jaar?

   $N = 10000.1{,}02^{36} \approx 20398{,}87$, dus na 3 jaar zijn ongeveer 20399 proteïnen gemuteerd.

4. Stel het functievoorschrift op van de functies waarvan je hier de grafiek ziet afgebeeld. Het betreft functies van de vorm: $f(x) = c + b.a^x$. Gebruik enkel de gegevens die je ziet aangeduid op de grafiek.



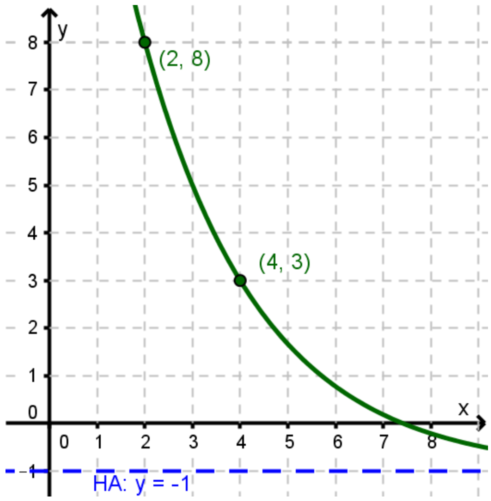
$c = -3 \Rightarrow f(x) = -3 + b.a^x$

$(0,1) \in f \Leftrightarrow -3 + b = 1 \Leftrightarrow b = 4$

$\Rightarrow f(x) = -3 + 4.a^x$

$(1,5) \in f \Leftrightarrow -3 + 4a = 5 \Leftrightarrow a = 2$

Dus $f(x) = -3 + 4.2^x$



$c = -1 \Rightarrow f(x) = -1 + b.a^x$

$(2,8) \in f \Leftrightarrow -1 + b.a^2 = 8 \Leftrightarrow b = 9/a^2$

$(4,3) \in f \Leftrightarrow -1 + b.a^4 = 3 \Leftrightarrow b = 4/a^4$

$$\Rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{4}{a^4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{9} \overset{\boxed{a>0}}{\Leftrightarrow} a = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{9}{(2/3)^2} = \frac{81}{4}$$

Dus $f(x) = -1 + \frac{81}{4}.\left(\frac{2}{3}\right)^x$

5. Het aantal mensen op Aarde wordt weergegeven in volgende tabel:

Jaartal (in jaren na 1900)	29	56	74	88	100	111
Miljard mensen	2	3	4	5	6	7

   a) Als we ervan uitgaan dat deze groei exponentieel is, stel dan met behulp van een exponentiele regressie een functievoorschrift op van de vorm $N(t) = N_0.a^t$ (rond alle parameters af op 5 decimalen).

   $N(t) \approx 1{,}27644.1{,}01554^t$

   b) Hoeveel zal de populatie op Aarde volgens dit model bedragen in 2100?

   $N(200) = 1{,}27644.1{,}01554^{200} \approx 27{,}865$

   Antw.: In 2100 zullen er 27,865 miljard mensen zijn volgens dit model.

6. Los de exponentiële vergelijkingen op:

a) $\sqrt{3^x}.3^{x^2+4}=9^{x+2}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}x}.3^{x^2+4}=\left(3^2\right)^{x+2} \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}x+x^2+4}=3^{2x+4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+x^2+4=2x+4 \Leftrightarrow x^2-\frac{3}{2}x=0$

$\Leftrightarrow x=0 \;\vee\; x=\frac{3}{2} \qquad V=\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{-1}{2}} \Leftrightarrow x+3=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2} \qquad V=\left\{-\frac{7}{2}\right\}$

c) $2^{x+3}=16^{x-3}$

$\Leftrightarrow 2^{x+3}=\left(2^4\right)^{x-3} \Leftrightarrow 2^{x+3}=2^{4x-12} \Leftrightarrow x+3=4x-12 \Leftrightarrow x=5 \qquad V=\{5\}$

d) $3^{2x-4}-10.3^{x-3}+1=0$

$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{3^4}-10.\frac{3^x}{3^3}+1=0 \overset{\boxed{stel\ t=3^x}}{\Leftrightarrow} \frac{t^2}{81}-\frac{10}{27}t+1=0 \Leftrightarrow t^2-30t+81=0 \Leftrightarrow t=3 \;\vee\; t=27$

$\Leftrightarrow 3^x=3 \;\vee\; 3^x=27 \Leftrightarrow x=1 \;\vee\; x=3 \qquad V=\{1,3\}$

e) $125^x-31\left(5^x-1\right).5^{x-1}=1$

$\Leftrightarrow 5^{3x}-31.5^{2x-1}+31.5^{x-1}-1=0 \overset{\boxed{stel\ t=5^x}}{\Leftrightarrow} t^3-\frac{31}{5}t^2+\frac{31}{5}t-1=0 \Leftrightarrow 5t^3-31t^2+31t-5=0$

$\Leftrightarrow t=1 \;\vee\; 5t^2-26t+5=0 \Leftrightarrow t=1 \;\vee\; t=5 \;\vee\; t=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 5^x=1 \;\vee\; 5^x=5 \;\vee\; 5^x=\frac{1}{5} \Leftrightarrow x=0 \;\vee\; x=1 \;\vee\; x=-1$

	5	-31	31	-5
1		5	-26	5
	5	-26	5	0

$V=\{0,1,-1\}$

f) $\frac{3^{3x+2}-6.\left(3^{x+2}-1\right)-9^{x+1}}{3^x-1}=3^x \qquad \boxed{B.V.: x\neq 0}$

$\Leftrightarrow 3^{3x+2}-6.\left(3^{x+2}-1\right)-9^{x+1}=3^x\left(3^x-1\right) \Leftrightarrow 3^{3x}.3^2-6.3^x.3^2+6-3^{2x}.9=3^{2x}-3^x$

$\Leftrightarrow 9.3^{3x}-10.3^{2x}-53.3^x+6=0 \overset{\boxed{stel\ t=3^x}}{\Leftrightarrow} 9t^3-10t^2-53t+6=0$

$\Leftrightarrow t=3 \vee 9t^2+17t-2=0 \Leftrightarrow t=3 \vee t=\frac{1}{9} \vee t=-2$

	9	-10	-53	6
3		27	51	-6
	9	17	-2	0

$\Leftrightarrow 3^x=3 \vee 3^x=\frac{1}{9} \vee \cancel{3^x=-2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2 \qquad V=\{1,-2\}$

7. Los de exponentiële ongelijkheden op:

a) $7^{3x-1}-7^{x+3}\geq 0 \Leftrightarrow 7^{3x-1}\geq 7^{x+3} \Leftrightarrow 3x-1\geq x+3 \Leftrightarrow 2x\geq 4 \Leftrightarrow x\geq 2 \quad V=[2,+\infty[$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-1}{x-4}}\geq 25 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-1}{x-4}}\geq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-4}\overset{!!!}{\leq}-2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-4}+2\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1+2(x-4)}{x-4}\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-9}{x-4}\leq 0 \quad V=[3,4[$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$\frac{3x-9}{x-4}$		+	0	-	|	+	

c) $2^{3x-x^2}\geq \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x} \Leftrightarrow 2^{3x-x^2}\geq \left(2^{-3}\right)^{1-x} \Leftrightarrow 3x-x^2\geq -3(1-x) \Leftrightarrow x^2\leq 3 \quad V=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

d) $9^{-x}<\frac{2+3^{x+1}}{3^x} \Leftrightarrow \frac{1}{9^x}<\frac{2+3.3^x}{3^x} \overset{\boxed{stel\ t=3^x}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{t^2}<\frac{2+3t}{t} \Leftrightarrow \frac{1-2t-3t^2}{t^2}<0$

x	$-\infty$		-1		0		$1/3$		$+\infty$
$\frac{1-2t-3t^2}{t^2}$		-	0	+	|	+	0	-	

$\Leftrightarrow \cancel{3^x<-1} \vee 3^x>1/3 \Leftrightarrow 3^x>3^{-1} \Leftrightarrow x>-1 \quad V=]-1,+\infty[$

Alternatief: $9^{-x}<\frac{2+3^{x+1}}{3^x} \overset{*_1}{\Leftrightarrow} 3^{-2x}.3^x<2+3^{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{3^x}<2+3.3^x \overset{*_2}{\Leftrightarrow} 3.\left(3^x\right)^2+2.3^x-1>0$

Dit verder oplossen is geen enkel probleem. De stappen $*_1$ en $*_2$ zijn toegelaten omdat er vermenigvuldigd wordt met een positief getal ($\forall x\in\mathbb{R}:3^x>0$).

8. Beredeneer dat vergelijkingen van het type $f(x)^{g(x)}=1$ uiteenvallen in 3 mogelijke gevallen.

Gebruik dit om deze vergelijking op te lossen: $\left(x^2+x-1\right)^{x-3}=1$.

$$f(x)^{g(x)}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1 \\ g(x)\in\mathbb{R}\end{cases} \vee \begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)\in\mathbb{R}_0\end{cases} \vee \begin{cases} f(x)=-1 \\ g(x)\in 2\mathbb{Z}\end{cases}$$ ($2\mathbb{Z}$ is de verzameling van de even getallen).

dus $\left(x^2+x-1\right)^{x-3}=1 \Leftrightarrow x^2+x-1=1 \vee \begin{cases} x-3=0 \\ x^2+x-1\neq 0\end{cases} \vee \begin{cases} x^2+x-1=-1 \\ x-3\in 2\mathbb{Z}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-2 \vee x=3 \vee \underset{-3\notin 2\mathbb{Z}}{\cancel{x=0}} \vee x=-1 \quad V=\{1,-2,3,-1\}$