



Goniometrie (formules)

1. Bewijs de formules:

a) ★ $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

b) ★ $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$

c) ★★ $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \tan \gamma - \tan \beta \tan \gamma}$

2. ★★ Bewijs dat $\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

3. ★★ Bewijs dat in $\triangle ABC$ met hoeken α, β en γ geldt:

$$\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} + \frac{\cot \beta + \cot \gamma}{\tan \beta + \tan \gamma} + \frac{\cot \gamma + \cot \alpha}{\tan \gamma + \tan \alpha} = 1.$$

4. Bewijs de identiteiten:

a) ★ $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

b) ★ $\tan(\alpha - \beta) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}$

c) ★★ $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2}{\cos 2\alpha}$

5. ★★ Bewijs dat, als $\alpha + \beta + \gamma + \varphi = \pi$, dan $\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma \cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \varphi$.

6. ★★★ Als gegeven is dat $\begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = x \\ \cos \alpha + \sin \beta = y \end{cases}$, druk dan $\sin(\alpha + \beta)$ uit in functie van x en y .

7. ★★★ Bewijs, als in driehoek $\triangle ABC$ geldt dat $\cos 4\hat{A} + \cos 4\hat{B} + \cos 4\hat{C} = -1$, dat dan één van de hoeken een veelvoud is van $\frac{\pi}{4}$.

(Bron: ingangsexamen KMS polytechnische wetenschappen 2001)

8. ★★ Bewijs: $\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$

(Bron: ingangsexamen KMS polytechnische wetenschappen 2015)

9. ★★★ Bewijs zonder rekenmachine dat $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

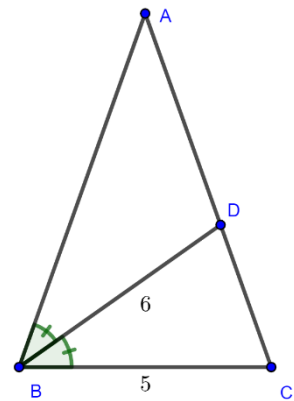
10. ★★★ Bereken zonder rekenmachine: $\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 5^\circ \cdot \sin 7^\circ \cdot \dots \cdot \sin 179^\circ$

11. ★★★ In driehoek $\triangle ABC$ geldt dat $\sin\left(\hat{A} + \frac{\hat{B}}{2}\right) = k \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2}$, met $k \in \mathbb{R}_0^+$.

Bewijs dat $\frac{k-1}{k+1} = \tan \frac{\hat{A}}{2} \cdot \tan \frac{\hat{C}}{2}$.

12. ★★★ In een gelijkbenige driehoek $\triangle ABC$ (met $|BC| = 5$ en $|AB| = |AC|$) geldt dat de (binnen-)bissectrice van hoek $\hat{B}$ de zijde $[AC]$ snijdt in D , en wel zo dat $|BD| = 6$.

Bereken $\cos \hat{B}$.



13. ★★ Bereken zonder rekenmachine: $\frac{\cos^3 15^\circ + \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$.

Veel succes!

1.	Tip: schrijf $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$ en gebruik de gekende somformules
2.	Tip: schrijf $3x = 2x + x$ en gebruik de gekende somformules en verdubbelingsformules
3.	Tip: $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$
4.	Veel verschillende manieren mogelijk maar ze kunnen alle drie bewezen worden met $LL = \dots = \dots = RL$.
5.	Tip: Als $\alpha + \beta + \gamma + \varphi = \pi$, dan is $\alpha + \beta = \pi - (\gamma + \varphi)$
6.	$\sin(\alpha + \beta) = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1$
7.	Gebruik de formules van Simpson om de uitdrukking te ontbinden in factoren (met rechterlid nul)
8.	Gebruik de formules van Carnot
9.	Gebruik de formules van Simpson
10.	$\frac{1}{2^{89}}$
11.	Niet opgeven!
12.	$\cos \hat{B} = 1/8$
13.	$3/4$