



Oscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Goniometrie (herhaling + inleiding)

1. Vereenvoudig de uitdrukkingen (*schrijf met zo weinig mogelijk goniometrische getallen en bewerkingen*).

a) $\star 1 - \cos^2 \alpha$

d) $\star \frac{\cos \alpha}{\cot \alpha}$

g) $\star (\sin^2 \alpha - 1) \cdot \tan^2 \alpha$

j) $\star \frac{1}{\sin^2 \beta} - \cot^2 \beta$

m) $\star (\sec \beta + \tan \beta)(1 - \sin \beta)$

p) $\star \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$

s) $\star \star (1 + \cot \alpha + \csc \alpha)(1 + \cot \alpha - \csc \alpha)$

u) $\star \star (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha - 1}$

w) $\star \star \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta$

b) $\star 1 - \sin^2 \alpha$

e) $\star \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$

h) $\star (1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)$

k) $\star \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$

n) $\star \star \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + 1$

q) $\star \star \frac{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

t) $\star (2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2$

v) $\star \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}}$

c) $\star \cos^2 \alpha \cdot (1 + \tan^2 \alpha)$

f) $\star \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\cot \alpha}$

i) $\star \sec \alpha - \tan \alpha \cdot \sin \alpha$

l) $\star \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}$

o) $\star (1 + \tan \alpha)^2 + (1 - \tan \alpha)^2$

r) $\star \star \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$

2. Bewijs de goniometrische identiteiten:

a) $\star (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

c) $\star (\tan \alpha + \cot \alpha) \sin \alpha \cos \alpha = 1$

e) $\star \star \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

g) $\star \star (\tan \alpha + \sec \alpha)^2 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$

i) $\star \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$

k) $\star \frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

m) $\star \star \frac{1}{1 + \sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \csc^2 \alpha} = 1$

o) $\star \star \frac{\tan^2 \beta}{\cos^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = \tan^2 \beta - \tan^2 \alpha$

q) $\star \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = \csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha$

s) $\star \star (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2 = 1$

t) $\star (\sec \alpha + \tan \alpha - 1)(\sec \alpha - \tan \alpha + 1) = 2 \tan \alpha$

u) $\star \star \sin \alpha (1 + \tan \alpha) + \cos \alpha (1 + \cot \alpha) = \sec \alpha + \csc \alpha$

b) $\star (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = (\sin \alpha \cos \alpha)^2$

d) $\star \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$

f) $\star \star \sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \csc^2 \alpha$

h) $\star \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$

j) $\star \star \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\tan \beta - \cot \alpha} = \tan \alpha \cdot \cot \beta$

l) $\star \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cot \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

n) $\star \star \frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$

p) $\star \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha - 1} + \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha + 1} = 2 \csc \alpha$

r) $\star \star (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)$

3. Bereken alle goniometrische getallen van de hoek α als gegeven is:

a) ★ $\cot \alpha = -\frac{15}{8} \quad (\alpha \in IV)$

b) ★★ $3\sin \alpha = 4\cos \alpha \quad (\alpha \in I)$

c) ★★★ $4\sin \alpha + 3\cos \alpha = 5$

d) ★★ $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad (\alpha \in III)$

e) ★★ $\frac{1}{\cos \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 \quad (\alpha \in II)$

f) ★★ $\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \quad (\alpha \in I)$

4. De grote wijzer van een klok is 12 cm lang, en de kleine wijzer is 8 cm lang. Het is nu precies drie uur.

a) ★ Welke afstand heeft het uiteinde van de grote wijzer afgelegd als het half vijf is geworden?

b) ★★ Hoe laat is het geworden als de kleine wijzer een afstand van 16 cm heeft afgelegd?

Geef je antwoord tot op de seconde nauwkeurig.

c) ★★ Om 12 uur staan beide wijzers precies gelijk. Als α de hoek is waarover de grote wijzer heeft

gedraaid (in radialen), en t de tijd in minuten vanaf 12 uur, dan geldt $\alpha = \frac{\pi}{30}t$.

Bewijs dat deze formule klopt en leidt ook een formule af voor β , de hoek die de kleine wijzer heeft gedraaid in radialen.

d) ★★★ Hoe laat is het als de wijzers van de klok voor het eerst na 12u precies weer gelijk staan?

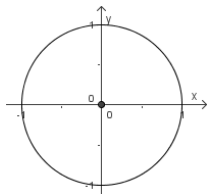
Geef je antwoord tot op de seconde nauwkeurig.

e) ★★★ Hoe laat is het als de wijzers voor het eerst na 12u precies loodrecht op elkaar staan?

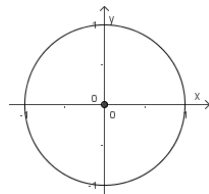
Geef je antwoord tot op de seconde nauwkeurig.

5. ★ Bereken de volgende goniometrische getallen door de hoeken te herleiden naar het eerste kwadrant met behulp van de formules voor verwante hoeken. Duid op de cirkels het gebruikte verwantschap aan.

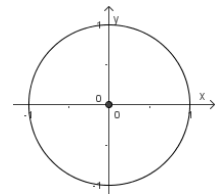
a) $\tan \frac{7\pi}{6}$



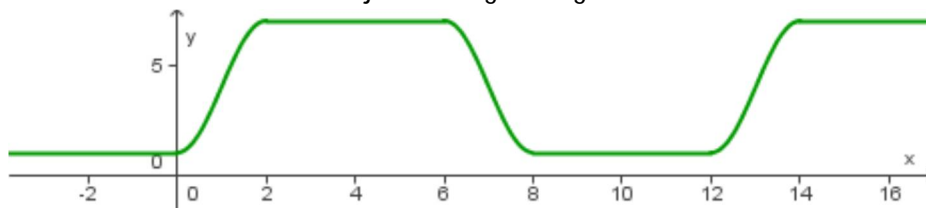
b) $\cos \frac{2\pi}{3}$



c) $\sin \frac{5\pi}{3}$



6. ★ Wat is de periode van de functie waarvan je hier de grafiek getekend ziet?

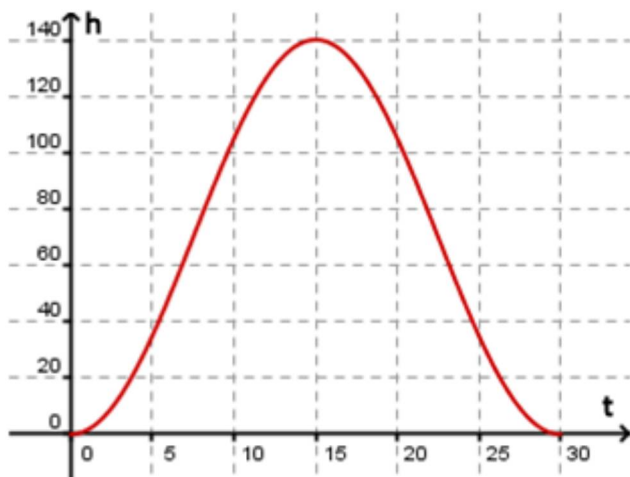


7. ★ Zet de volgende functies om naar algemene sinusfuncties (met positieve amplitude en pulsatiefactor):

- $f(x) = -4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7} - 2x\right) + 3$

- $g(x) = -3 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 1$

8. ★ Een tochtje op het reuzenrad 'The Eye of London' kan grafisch weergegeven worden op met volgende sinusoïde:



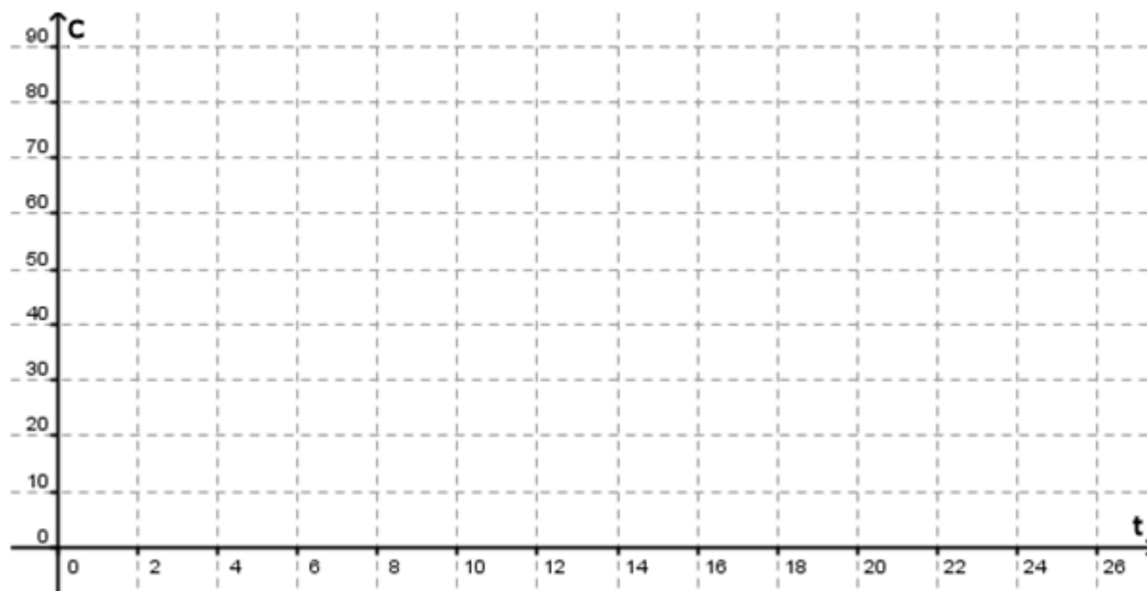
Stel het functievoorschrift op van deze sinusoïde.

9. Melatonine is een hormoon dat bij mensen geproduceerd wordt uit serotonine in de epifyse en het netvlies, en in een met de tijd van de dag variërende hoeveelheid aan het bloed en het hersenvocht afgegeven. Eenvoudig gesteld bepaalt de hoeveel melatonine in je bloed hoe moe je je voelt. Bij een volwassen mens kan men de melatonine-concentratie in het bloed benaderen met de sinusfunctie:

$$C(t) = 45 + 35 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 20)\right),$$

hierbij is C uitgedrukt in picogram per milliliter (pg/ml), en t het tijdstip op de dag uitgedrukt in uur ($t = 0$ is middernacht, $t = 12$ is middag).

- a) ★ Teken de grafiek van $C(t)$ voor één dag ($0 \leq t \leq 24$) in onderstaand venster:



- b) ★ Wat is de gemiddelde hoeveelheid melatonine in het bloed van een volwassen mens?
 c) ★★ Wanneer is de concentratie melatonine in het bloed maximaal? Hoeveel bedraagt dit maximum?
 d) ★★ Biologen hebben bepaald dat het aangeraden is voor adolescenten om te rusten (slapen) als het melatoninegehalte in het bloed meer bedraagt dan 62,5 pg/ml. Hoe lang zouden zij dan per nacht moeten slapen?

	Zie uitgeschreven oplossingen. Er zijn meerdere antwoorden mogelijk.
1.	Zo kan je bijvoorbeeld $\frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$ ook schrijven als $\sin \beta \cdot \sec \alpha$, wat even 'eenvoudig' is. Als je twijfelt aan de correctheid van een oplossing vraag het dan even.
2.	Ook hier kan je alles bewijzen op meerdere manieren. Ik heb geprobeerd een eenvoudige oplossing als voorbeeld te geven. Jullie zoeken het soms net iets verder. Als je twijfelt aan de correctheid van een oplossing vraag het dan even.
3.	<p>a) $\sin \alpha = -\frac{8}{17}, \cos \alpha = \frac{15}{17}, \tan \alpha = -\frac{8}{15}, \cot \alpha = -\frac{15}{8}, \sec \alpha = \frac{17}{15}, \csc \alpha = -\frac{17}{8}$</p> <p>b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}, \sec \alpha = \frac{5}{3}, \csc \alpha = \frac{5}{4}$</p> <p>c) $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}, \sec \alpha = \frac{5}{3}, \csc \alpha = \frac{5}{4}$</p> <p>d) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \cot \alpha = -\sqrt{3}, \sec \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \csc \alpha = -2$</p> <p>e) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \tan \alpha = -\sqrt{3}, \cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sec \alpha = -2, \csc \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$</p> <p>f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \alpha = 1, \cot \alpha = 1, \sec \alpha = \sqrt{2}, \csc \alpha = \sqrt{2}$</p>
4.	<p>a) 36π cm</p> <p>b) 6:49:11</p> <p>c) Bereken eerst hoeveel radialen de wijzers per minuut draaien en vermenigvuldig dit met t.</p> <p>d) 13:05:27</p> <p>e) 12:16:22</p>
5.	$\tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
6.	$P = 12$
7.	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = 4 \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{14}\right)\right) + 3$ $g(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + 3\pi)\right) + 1$
8.	$h(t) = 70 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15}(t - 7,5)\right) + 70$
9.	<p>a) Lees de parameters juist af uit het voorschrift en volg de stappen beschreven in de cursus. p.o.c.</p> <p>b) 45 pg/ml c) om 2u 's nachts bedraagt het 80 pg/ml d) Hij moet 8u slapen.</p>