1. Bereken zonder rekenmachine de inverse matrix van $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{2R_3+R_1}{\overset{R_2-R_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 2\end{array}\right]\underset{2R_3-3R_2}{\overset{2R_1-R_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 4\end{array}\right]$$

$$\underset{R_2-3R_3}{\overset{R_1+R_3}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 0 & 0 & 8 & -4 & 4\\ 0 & 2 & 0 & -16 & 10 & -12\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 4\end{array}\right]\underset{\frac{R_2}{2}}{\overset{\frac{R_1}{4}}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -8 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 4\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -8 & 5 & -6\\ 5 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

2. Gegeven zijn de matrices A en B :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ en } B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a) Verifieer dat $A\cdot B=B\cdot A$.

$A\cdot B=B\cdot A=A$ want $B=I_3$

b) Bereken $(B-A)\left(B^2+AB+A^2\right)$.

$(B-A)\left(B^2+AB+A^2\right)=(I-A)\left(I+A+A^2\right)=I+A+A^2-A-A^2-A^3=I$ (want $A^3=O$).

c) Gebruik het voorgaande resultaat om $(B-A)^{-1}$ te berekenen.

$$\Rightarrow (B-A)^{-1}=B^2+AB+A^2=I+A+A^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3. Gegeven zijn de matrices $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ en $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

Toon aan dat er reële getallen a en b bestaan waarvoor geldt dat $\left(A+aI_3\right)B=bC^{-1}$.

Reken eerst en vooral na dat $C^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 1\\ 0 & 1/4 & 0\\ 1/4 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

$$\left(A+aI_3\right)\cdot B=\begin{bmatrix}2+a & 2 & 2\\ 0 & 4+a & 0\\ 3 & -3 & 1+a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+a & 4+a & 10+2a\\ 0 & 4+a & 0\\ 4+a & 0 & 9+3a\end{bmatrix}$$

De gelijkheid klopt dus inderdaad voor $a=-3$ en $b=4$.

4. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Bereken A^{-2}.

$$A^{-2} = \left(A^{-1}\right)^2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Voor welke waarden van x heeft de matrix $X = \begin{bmatrix} 1 & x & 8 \\ -3 & 4 & x \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ geen inverse matrix?

Er werd niet gevraagd ook de inverse matrix te berekenen, maar voor de volledigheid zal ik het hier toch even illustreren (voor wat gevraagd was volstaat het de matrix X rij-canoniek te maken (exact dezelfde manier als hier maar de laatste drie kolommen mag je wegdenken).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & x & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+3x & x+24 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5-4x & -31 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4x+3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -5-4x & -31 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

In deze laatste stap doen we $4R_2 + 3R_3$ om als spilelement een 1 te krijgen. Deden we dit niet dan zouden we een (overbodige) voorwaarde opleggen aan x.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8-3x-4x^2 & 1 & -4x & -3x \\ 0 & 1 & 4x+3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 16x^2+32x-16 & -4 & 20+16x & 16+12x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8-3x-4x^2 & 1 & -4x & -3x \\ 0 & 1 & 4x+3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4x^2+8x-4 & -1 & 5+4x & 4+3x \end{array}\right]$$

Deze matrix is dus inverteerbaar als en slechts als $x^2 + 2x - 1 \neq 0$, dus $x \notin \left\{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right\}$, dan geldt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4x^2+8x-4 & 0 & 0 & 4+5x & -40-x & -32+x^2 \\ 0 & 4x^2+8x-4 & 0 & 3+4x & -31 & -24-x \\ 0 & 0 & 4x^2+8x-4 & -1 & 5+4x & 4+3x \end{array}\right]$$

Dus $X^{-1} = \dfrac{1}{4x^2+8x-4} \cdot \begin{bmatrix} 4+5x & -40-x & -32+x^2 \\ 3+4x & -31 & -24-x \\ -1 & 5+4x & 4+3x \end{bmatrix}$.

Na Nieuwjaar zullen we een veel eenvoudigere manier zien om deze inverse matrix te berekenen. De uitdrukking $4x^2+8x-4$ zullen we de determinant van de matrix X noemen en bepaalt dus (onder meer) of X een inverse heeft of niet.