1. ★* Bepaal het domein, de nulpunten en het tekenverloop van de functie $f(x)=\sqrt{2x-1}-2x+7$.

$x \in dom\ f \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/2$, dus $dom\ f = [1/2, +\infty[$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=2x-7 \overset{\boxed{KV: 2x-7\geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7/2}}{\Rightarrow} 2x-1=4x^2-28x+49 \Leftrightarrow 4x^2-30x+50=0 \Leftrightarrow x=5 \vee \overset{KV}{\cancel{x=5/2}}$$

x	$-\infty$		$1/2$		5		$+\infty$
$f(x)$		///	6	+	0	-	

2. ★* Bepaal het domein, de nulpunten en het tekenverloop van de functie $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+7x-10}}{x-4}$.

$$x \in dom\ f \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+7x-10 \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+7x-10 \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \overset{zie\ TV}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in]-\infty, -10/3] \cup [1, +\infty[\\ x \neq 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-10/3$		1		$+\infty$
$3x^2+7x-10$		+	0	-	0	+	

Dus $dom\ f =]-\infty, -10/3] \cup [1, 4[\cup]4, +\infty[$

De nulwaarden zijn natuurlijk $-10/3$ en 1, en het tekenverloop van de functie is:

x	$-\infty$	$-10/3$		1		4		$+\infty$
LL	-	0	///	0	-	|	+	

3. ★* Bepaal het domein van de functie $f(x)=\sqrt{\sqrt{2x-8}-6}$.

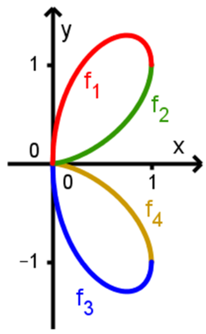
We doen een tekenverloop van wat onder de wortel staat:

$\sqrt{2x-8}-6=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-8}=6 \Leftrightarrow 2x-8=36 \Leftrightarrow x=22$ (met bestaansvoorwaarde: $2x-8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$).

x	$-\infty$		4		22		$+\infty$
$\sqrt{2x-8}-6$		///	-6	-	0	+	

Dus $dom\ f = [22, +\infty[$.

4. ★★ Op de grafiek hiernaast staat het dubbele folium $K \leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = 4xy^2$.



a) Als je deze kromme wil beschrijven door functies, hoeveel functies heb je dan minstens nodig? Minstens vier, want er zijn x-waarden met vier verschillende y-waarden.

b) Stel hun functievoorschriften op en duid ze op de grafiek aan.

$$(x^2+y^2)^2=4xy^2 \Leftrightarrow x^4+2x^2y^2+y^4=4xy^2 \Leftrightarrow y^4+(2x^2-4x)y^2+x^4=0.$$

$$\Delta=(2x^2-4x)^2-4x^4=16x^2-16x^3 \Rightarrow y^2=\frac{4x-2x^2 \pm 4\sqrt{x^2-x^3}}{2}=2x-x^2 \pm 2\sqrt{x^2-x^3}.$$

Dus $f_1(x)=\sqrt{2x-x^2+2\sqrt{x^2-x^3}}$, $f_2(x)=\sqrt{2x-x^2-2\sqrt{x^2-x^3}}$, $f_3(x)=-\sqrt{2x-x^2+2\sqrt{x^2-x^3}}$ en

$f_4(x)=-\sqrt{2x-x^2-2\sqrt{x^2-x^3}}$.

5. ★★ Los de volgende irrationale vergelijkingen op:

- $3+\sqrt{3x+1}=x \quad \boxed{B.V.: x\geq -1/3}$

  $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=x-3 \quad \boxed{K.V.: x\geq 3}$

  $\Rightarrow 3x+1=x^2-6x+9$

  $\Leftrightarrow x^2-9x+8=0$

  $\Leftrightarrow \cancel{x=1} \vee x=8 \qquad V=\{8\}$

- $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5} \quad \boxed{B.V.: x\geq -1 \wedge x\geq 5/3}$

  $\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=3x-5 \quad \boxed{K.V.: x\geq 5/3}$

  $\Rightarrow 4x+4=9x^2-30x+25$

  $\Leftrightarrow 9x^2-34x+21=0$

  $\Leftrightarrow x=3 \vee \cancel{x=7/9} \qquad V=\{3\}$

- $\sqrt{7x+2}-\sqrt{3x+1}=1 \quad \boxed{B.V.: x\geq -2/7 \wedge x\geq -1/3}$

  $\Leftrightarrow \sqrt{7x+2}=1+\sqrt{3x+1}$

  $\Rightarrow 7x+2=1+2\sqrt{3x+1}+3x+1$

  $\Leftrightarrow 2x=\sqrt{3x+1} \quad \boxed{K.V.: x\geq 0}$

  $\Rightarrow 4x^2=3x+1 \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0$

  $\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1/4 \qquad V=\{1\}$

- $\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}-\sqrt{4x+1}$

  $\boxed{B.V.: x\geq -2 \wedge x\geq -13/6 \wedge x\geq -1/4}$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=\sqrt{6x+13}$

  $\Rightarrow x+2+2\sqrt{(x+2)(4x+1)}+4x+1=6x+13$

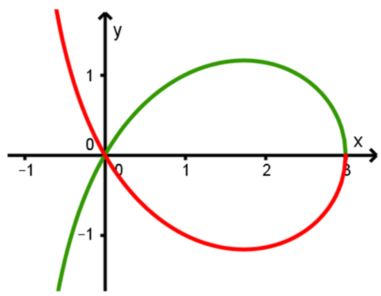
  $\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+9x+2}=x+10 \quad \boxed{K.V.: x\geq -10}$

  $\Rightarrow 16x^2+36x+8=x^2+20x+100$

  $\Leftrightarrow 15x^2+16x-92=0 \ \Leftrightarrow \ x=2 \vee \cancel{x=\frac{-46}{15}}$

  $V=\{2\}$

6. ★★★ De grafiek hiernaast heet de trisectrix van Maclaurin. Deze kromme heeft als vergelijking: $K \leftrightarrow y^2(x+1)=x^2(3-x)$



- Bepaal het voorschrift van de functie die als grafiek het rode stuk van de kromme heeft.

$$y^2(x+1)=x^2(3-x) \Rightarrow y^2=\frac{x^2(3-x)}{x+1} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}=\pm x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$$

De laatste stap is nodig want anders is er een positieve en een negatieve functie, terwijl het rode stuk van de functie voor de y-as positief is, en na de y-as negatief. De rode functie is dus: $f_1(x)=-x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$.

- Bepaal het domein van deze functie.

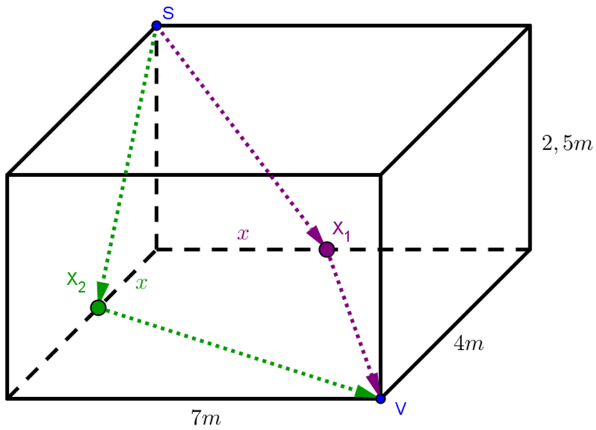
$x\in dom\ f_1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x+1}\geq 0$, met een eenvoudig tekenverloop vind je: $dom\ f_1=]-1,3]$.

7. ★★★* Een spin zit in de hoek van een kamer met afmetingen 7m x 4m x 2,5m tegen het plafond. In de overstaande hoek zit een vlieg gevangen.

De spin haar snelheid bedraagt 12 cm/s op het plafond, 10 cm/s op de muren, en 15 cm/s op de vloer.

Hoe snel kan de spin bij de vlieg zijn?

Het is duidelijk dat de spin via punt X_1 of via punt X_2 zal gaan, maar waar dat punt precies ligt weten we niet.



Gaat ze langs X_1 dan geldt (via Pythagoras) voor de tijdsduur (met eenheden s, cm en cm/s):

$$t = \frac{|SX_1|}{10} + \frac{|X_1V|}{15} = \frac{\sqrt{x^2 + 62500}}{10} + \frac{\sqrt{(700-x)^2 + 1600}}{15} \overset{met\ GRM}{\Rightarrow} MIN(222,21\,;\ 65,41)$$

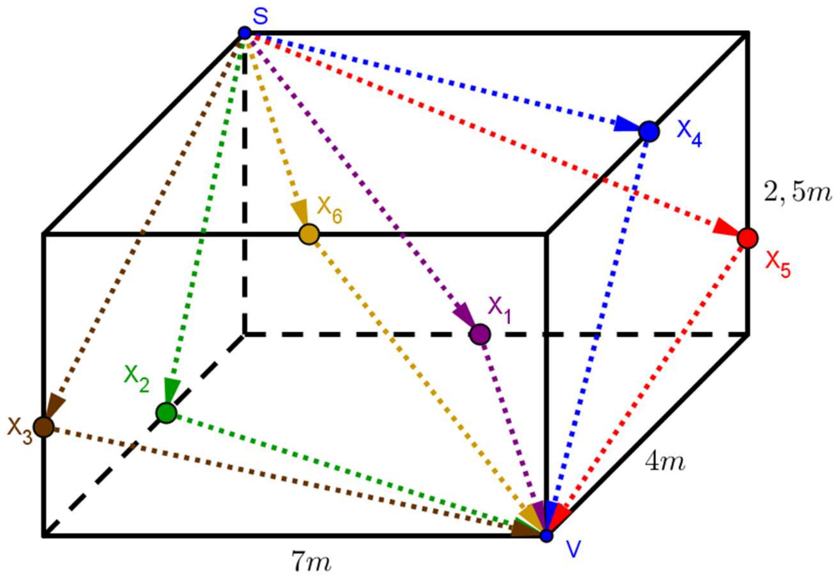
In dit geval ligt X_1 dus op 222,21 cm van de hoek en doet de spin er 65,41 seconden over.

Gaat ze langs X_2 dan geldt:

$$t = \frac{|SX_2|}{10} + \frac{|X_2V|}{15} = \frac{\sqrt{x^2 + 62500}}{10} + \frac{\sqrt{(400-x)^2 + 4900}}{15} \overset{met\ GRM}{\Rightarrow} MIN(202,03\,;\ 46,14)$$

In dit geval ligt X_2 dus op 202,03 cm van de hoek en doet de spin er 46,14 seconden over.

Marcel de spin bereikt dus het snelst Johnny de vlieg na 46,14 seconden.



In principe kan je deze tijden ook nog berekenen voor de wegen die langs punten X_3, X_4, X_5 en X_6 gaan, maar het is duidelijk dat ze op de vloer het snelste is dus dat de weg waar ze langst op de vloer loopt het snelst gaat zijn. Eigenlijk kon je dus zelfs al aanvoelen dat de route via X_2 de snelste ging zijn.