1. Bereken de volgende limieten:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+x^4-2x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=\left(-\infty\right)^4=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to4}\left(2x^2-x+1\right)=2.4^2-4+1=29$

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x+1}{2x-1}=\dfrac{4.2+1}{2.2-1}=3$

d) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-6x^2+4x+5}{6x-x^2-5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\cancel{(x-5)}\left(x^2-x-1\right)}{\cancel{(x-5)}\left(-x+1\right)}=-\dfrac{19}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cancel{x}}{\cancel{x}}=4$

f) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-2x}{2x+6}\left(=\frac{15}{0}\right)$, dus $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}}\dfrac{x^2-2x}{2x+6}=-\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\>}}\dfrac{x^2-2x}{2x+6}=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+2)^5}{(2x-1)^2(1-3x)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x)^5}{(2x)^2(-3x)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{\cancel{5}\,2}\cancel{x^5}}{-2^2\cancel{x^2}\,\cancel{3^3}\,\cancel{x^3}}=-\dfrac{9}{4}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{4x^2+3x}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}}-2\right)}=\dfrac{2}{-2-2}=-\dfrac{1}{2}$

i) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{3x+10}+2x+2}{x^4+7x-2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{3x+10}+(2x+2)}{x^4+7x-2}\cdot\dfrac{\sqrt{3x+10}-(2x+2)}{\sqrt{3x+10}-(2x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-4x^2-5x+6}{x^4+7x-2}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(-4x+3)}{\cancel{(x+2)}\left(x^3-2x^2+4x-1\right)}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{-11}{100}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+x-1}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+x-1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x-1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+x-1}+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$

k) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+1-\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x+3}-3x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x+1)-\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x+3}-(3x-1)}\cdot\dfrac{(2x+1)+\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x+3}+(3x-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}+(3x-1)}{(2x+1)+\sqrt{4x+5}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-4}{-9x^2+7x+2}\cdot\dfrac{4}{6}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(4x+4)}{\cancel{(x-1)}(-9x-2)}\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{16}{33}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{4-x}+\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{\sqrt{4-x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{3}{+\infty+\infty}=0$

2. Bepaal de asymptoten van volgende functies:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^6+1}-\sqrt{2x}}{x^3-x}$ $\qquad x\in dom\ f \Leftrightarrow \begin{cases}2x>0\\ x^3-x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\neq 0\wedge x\neq 1\wedge x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$

Het domein van de functie is $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. Er zijn dus twee potentiële verticale asymptoten:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{x^6+1}-\sqrt{2x}}{x^3-x}=-\infty \quad\Rightarrow\quad \boxed{\underline{\text{V.A.:}}\ x=0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^6+1}-\sqrt{2x}}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^6+1}-\sqrt{2x}}{x^3-x}\cdot\frac{\sqrt{x^6+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{x^6+1}+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^6-2x+1}{x^3-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x-1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x\right)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow \text{ geen extra V.A.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^6+1}-\sqrt{2x}}{x^3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}-\sqrt{\frac{2}{x^5}}\right)}{\cancel{x^3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\underline{\text{H.A.:}}\ y=1}\text{, als } x\to+\infty$$

*(voor $x\to-\infty$ is geen asymptoot mogelijk omdat het domein dit niet toelaat)*

b) $f(x)=\sqrt{x^2+6x+3}+x-2$ geen V.A.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+6x+3}+x-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}}=2$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+3}-x-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+6x+3}-(x+2)}{\sqrt{x^2+6x+3}+(x+2)}\cdot\left(\sqrt{x^2+6x+3}+(x+2)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+6x+3}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\underline{\text{S.A.:}}\ y=2x+1}\text{, als } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x+3}+(x-2)\right)}{\sqrt{x^2+6x+3}-(x-2)}\cdot\left(\sqrt{x^2+6x+3}-(x-2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x+7}{\sqrt{x^2+6x+3}-(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(10+\frac{7}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)\right)}=-5 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\underline{\text{H.A.:}}\ y=-5}\text{, als } x\to-\infty$$

c) $f(x)=\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}-2x$ geen V.A.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}-2x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}\right)^2+2x\cdot\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}+4x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}\right)^2+2x\cdot\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}+4x^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-12x^2+1}{\left(\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}\right)^2+2x\cdot\sqrt[3]{8x^3-12x^2+1}+4x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(-12+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{8-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+2\cdot\sqrt[3]{8-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^3}}+4\right)} = \frac{-12}{12} = -1 \Rightarrow \boxed{\text{H.A.: } y=-1}\text{, als } x\to\pm\infty$$

3. Leerlingen denken soms ten onrechte dat de grafiek van een functie een asymptoot nooit kan snijden.

   Toon aan dat dit onjuist is door de snijpunten te bereken van de grafiek van $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{x}$ met haar horizontale asymptoot.

   $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{\cancel{x}} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{H.A.: } y=1}$$

   Snijpunten: $\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3-x^2+1}=x \Leftrightarrow x^3-x^2+1=x^3 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \lor x=1$

   De grafiek snijdt de H.A. dus in de punten $A(-1,1)$ en $B(1,1)$.

4. Als $a\in\mathbb{R}_0^+$ en $b,c\in\mathbb{R}$, dan heeft de functie $f(x)=\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax$ altijd een horizontale en een schuine asymptoot. Bepaal hun vergelijking.

   $$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-\sqrt{a^2+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}-a\right)}{\cancel{x}}=-2a \quad \text{(want } \sqrt{a^2}=a\text{)}$$

   $$q=\lim_{x\to-\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2x^2+bx+c}+ax\right)\cdot\left(\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax\right)}{\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{bx+c}{\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax}$$

   $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{a^2+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}-a\right)}=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y=-2ax-\frac{b}{2a}}\text{, als } x\to-\infty$$

   $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax\right)\left(\sqrt{a^2x^2+bx+c}+ax\right)}{\sqrt{a^2x^2+bx+c}+ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx+c}{\sqrt{a^2x^2+bx+c}+ax}$$

   $$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{a^2+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+a\right)}=\frac{b}{2a} \Rightarrow \boxed{\text{H.A.: } y=\frac{b}{2a}}\text{, als } x\to+\infty$$

5. Bewijs dat elke veelterm van oneven graad minstens één nulpunt heeft.

   Noem die veelterm $f$ en stel dat de hoogstegraadsterm van gegeven wordt door $ax^{2n+1}$ (met $a\in\mathbb{R}_0$ en $n\in\mathbb{N}$).

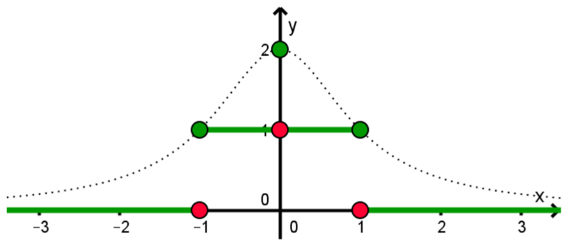
   Dan geldt: als $a>0$ : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^{2n+1}=-\infty$ en $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ax^{2n+1}=+\infty$

   als $a<0$ : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^{2n+1}=+\infty$ en $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ax^{2n+1}=-\infty$

Wegens de stelling van Bolzano zal er dan minstens één nulpunt zijn in het domein van de functie omdat de functie continu is en er altijd twee tegengestelde functiewaarden kunnen gevonden worden omwille van de tegengestelde limieten op $-\infty$ en $+\infty$.

6. Bespreek de continuïteit van de functie $f(x)=\left\lfloor \dfrac{2}{x^2+1} \right\rfloor$

Je ziet de grafiek van de functie rechts getekend. Deze is eenvoudig af te leiden uit het functievoorschrift.




De functie is overal continu, behalve:

- In $0$ is ze discontinu
- In $1$ is ze linkscontinu
- In $-1$ is ze rechtscontinu

7. De functie $f(x)=2^{2x}-4x^2-7$ heeft een nulpunt in het interval $[0,4]$.

a) Bewijs dit met behulp van de stelling van Bolzano.

$f(0)=2^{2\cdot 0}-4\cdot 0^2-7=-6$ en $f(4)=2^{2\cdot 4}-4\cdot 4^2-7=185$.

De functie heeft dus minstens één nulpunt in $]0,4[$ omdat $f$ er continu is en op de grenzen tegengestelde functiewaarden heeft.

b) Bereken het nulpunt met het algoritme van Bolzano (startend met $a=0$ en $b=4$).

| | Interval | Midden $m_i$ | Functiewaarde $f(m_i)$ | |
|---|---|---|---|---|
| Stap 1 | $[0,4]$ | $m_1=2$ | $f(2)=2^{2\cdot 2}-4\cdot 2^2-7=-7$ | $\Rightarrow$ pas de linkergrens aan. |
| Stap 2 | $[2,4]$ | $m_2=3$ | $f(3)=2^{2\cdot 3}-4\cdot 3^2-7=21$ | $\Rightarrow$ pas de rechtergrens aan. |
| Stap 3 | $[2,3]$ | $m_3=2{,}5$ | $f(2{,}5)=2^{2\cdot 2{,}5}-4\cdot 2{,}5^2-7=0$ | $\Rightarrow 2{,}5$ is een nulpunt! |

*(Merk op dat dit enkel te doen is zonder GRM omdat het nulpunt snel gevonden wordt – anders is hier hoegenaamd geen beginnen aan zonder gebruik te maken van rekenhulp).*