1. ★★ Vereenvoudig de uitdrukkingen (en schrijf zonder gebroken en negatieve exponenten):

a) $\dfrac{a^2.\left(b^{-2}.c^4\right)^{2,5}}{\sqrt[4]{a}.\left(\sqrt{b}.\sqrt[3]{c}\right)^{-6}} = \dfrac{a^2b^{-5}c^{10}}{a^{1/4}b^{-3}c^{-2}} = a^{7/4}b^{-2}c^{12} = \dfrac{\sqrt[4]{a^7}c^{12}}{b^2}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{9}.\sqrt[5]{27}}{\sqrt[10]{3}} = \dfrac{3^{1/2}.3^{2/3}.3^{3/5}}{3^{1/10}} = 3^{50/30} = 3^{5/3} = \sqrt[3]{3^5}$

c) $\left(\sqrt[4]{49}-3.\sqrt{28}\right)^2 = \left(\sqrt{7}-6\sqrt{7}\right)^2 = \left(-5\sqrt{7}\right)^2 = 175$

d) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-\frac{9}{2}}.\left(0,5^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(3^{2/3}\right)^{-\frac{9}{2}}.\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{-3}.2^2 = \dfrac{4}{27}$

e) $\left(\sqrt[3]{36}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)^3 = 36-3.\dfrac{\sqrt[3]{36}^2}{\sqrt[3]{6}}+3.\dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}^2}-\dfrac{1}{6} = 36-3.6+3-\dfrac{1}{6} = \dfrac{125}{6}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{b^2}.a.\sqrt[4]{a^3b}}{a^2.\sqrt[12]{b^{-1}a^{-3}}} = \dfrac{b^{2/3}.a.a^{3/4}.b^{1/4}}{a^2.b^{-1/12}.a^{-1/4}} = \dfrac{\cancel{a^{7/4}}b^{11/12}}{\cancel{a^{7/4}}b^{-1/12}} = b^{12/12} = b$

2. ★★ Bereken zonder rekenmachine:

a) $\left(\dfrac{8}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} = \dfrac{25}{4}$

b) $16^{0,75} = 16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

c) $\sqrt[6]{\left(4-\sqrt{12}\right)^3}.\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}}.\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \sqrt{16-12} = 2$

3. ★ Bereken met je rekenmachine (rond af op 5 decimalen):

a) $\sqrt[6]{\dfrac{9-\sqrt[5]{5+\sqrt[4]{3}}}{\sqrt[3]{5+\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}}} \approx 1,26663$

b) $2^{1/\pi} \approx 1,24687$

4. ★★ De massa van een bol wordt gegeven door de formule $m = \dfrac{4}{3}\rho\pi.r^3$, met r de straal van de bol en ρ de massadichtheid van het materiaal waaruit hij vervaardigd is.

a) Schrijf de straal in functie van de andere onbekenden.

$m = \dfrac{4}{3}\rho\pi.r^3 \Leftrightarrow r^3 = \dfrac{3m}{4\rho\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{3m}{4\rho\pi}}$

b) Bereken de diameter van een massieve ijzeren bol die 1 ton weegt, als je weet dat de massadichtheid van ijzer 7870 kg/m³ is.

$d = 2r = 2.\sqrt[3]{\dfrac{3.1000}{4.7870.\pi}} = 0,62375$. De diameter van zo'n bol is dus 62,375 cm.

5. ★★ Welke van de volgende getallen is het grootst: $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{2010}$ of $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-1341}$?

$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{2010} = \left(7^{1/3}\right)^{2010} = 7^{670}$ en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-1341} = \left(\sqrt{7}\right)^{1341} = \left(7^{1/2}\right)^{1341} = 7^{670,5}$ dus $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{2010} < \left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-1341}$.

6. ★★ Na lange observatie van vele meren over heel de wereld, blijkt dat er een direct verband bestaat tussen het aantal vissoorten dat voorkomt in een meer, de oppervlakte van dat meer, en de gemiddelde temperatuur ervan. Dit verband wordt gegeven door de formule: $1,21\,.\,v^4 = S^3\,.\,t^{1,6}$, waarbij v het aantal vissoorten is, S de oppervlakte van het meer in km^2 en t de gemiddelde watertemperatuur in °C.

a) Vorm de formule om naar de onbekende v.

$$v^4 = \frac{S^3\,.\,t^{1,6}}{1,21} \Leftrightarrow v = \sqrt[4]{\frac{S^3\,.\,t^{1,6}}{1,21}}$$

b) Hoeveel vissoorten zitten er ongeveer in het Comomeer, als je weet dat het Comomeer $146\ km^2$ groot is, en gemiddeld $17\ °C$ warm?

$v = \sqrt[4]{\frac{146^3\,.\,17^{1,6}}{1,21}} \approx 124,38$, er leven dus ongeveer 124 verschillende vissoorten in het Comomeer.

c) Hoe groot is een meer dat bij $22\ °C$ tot 50 verschillende vissoorten bevat?

$S^3 = \frac{1,21\,.\,v^4}{t^{1,6}} \Leftrightarrow S = \sqrt[3]{\frac{1,21\,.\,v^4}{t^{1,6}}} = \sqrt[3]{\frac{1,21\,.\,v^4}{t^{1,6}}} = \sqrt[3]{\frac{1,21\,.\,50^4}{22^{1,6}}} \approx 37,75$. Het is dus bij de 37,75 km².

7. ★★ Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2^x$

Bepaal $f \circ f \circ f \circ f(2)$ en $g \circ g \circ g \circ g(2)$. Laat je antwoord staan als macht van 2.

$$f\Big(f\big(f(f(2))\big)\Big) = f\Big(f\big(f(2^2)\big)\Big) = f\big(f(2^4)\big) = f(2^8) = 2^{16}$$

$$g\Big(g\big(g(g(2))\big)\Big) = g\Big(g\big(g(2^2)\big)\Big) = g\big(g(2^4)\big) = g(2^{16}) = 2^{65536}$$

8. ★★ Los op in $\mathbb{R}^+$: $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}$

$$\left(x^{3/4}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}x^{2/3}\right)^{12} \overset{(x\geq 0)}{\Leftrightarrow} x^9 = 2^6x^8 \Leftrightarrow x^9 - 64x^8 = 0 \Leftrightarrow x^8(x-64) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 64$$

9. ★★★ Voor hoeveel natuurlijke getallen geldt $\left|\sqrt[3]{n} - 4\right| < 1$?

$\left|\sqrt[3]{n} - 4\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \sqrt[3]{n} - 4 < 1 \Leftrightarrow 3 < \sqrt[3]{n} < 5 \Leftrightarrow 27 < n < 125$. Er zijn zo 97 natuurlijke getallen.

10. ★★ Als $x^x = 5$, dan is $5x^{5x}$ gelijk aan... $5x^{5x} = 5.\left(x^x\right)^5 = 5.5^5 = 5^6$ $\boxed{E}$

11. ★★★★ Bepaal het kleinste natuurlijk getal n zodanig dat n^n geen deler is van $2016!$.

De eerste n getallen waarvan n een deler is, zijn de getallen $n, 2n, 3n, ..., n^2$.

Opdat n^n dan een deler zou zijn van $2016!$, moet dus $n^2 < 2016$, dat is het geval als $n < 45$.

Stel nu $n = 45 = 3^2.5$:

- Er zijn duidelijk meer dan 45 veelvouden van 5 in het product $2016!$
- Er zijn ook duidelijk meer dan 45 veelvouden van 9 in het product $2016!$

$\Rightarrow 2016!$ is deelbaar door 45^{45}.

Een analoge verklaring geldt voor $n = 46 = 23.2$.

Het kleinste natuurlijk getal dat we zoeken, is dus $n = 47$, want $2016!$ is niet deelbaar door 47^{47}.