



Óscar Romero College
 Campus Talen & Exacte Wetenschappen
 Vak: Wiskunde
 Leerkracht: Sven Mettepenningen

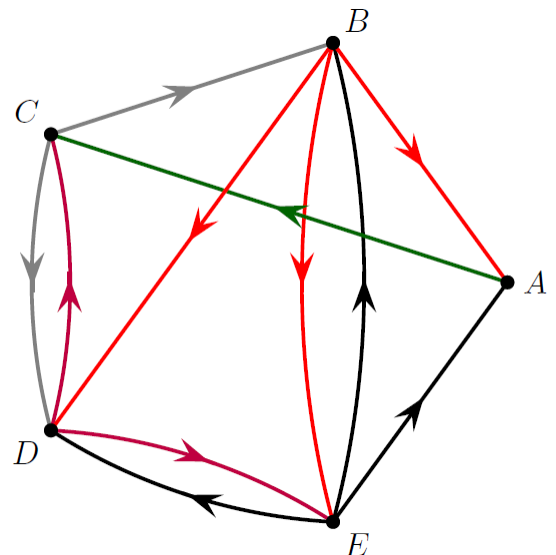
Matrices - toepassingen

1. Zij gegeven een willekeurige 2×2 -matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- a) ★ Bewijs dat $A^2 = (a + d) \cdot A - (ad - bc) \cdot I_2$
- b) ★★ Maak gebruik van \boxed{a} om een idempotente matrix te construeren.
- c) ★★ Maak gebruik van \boxed{a} om een involutorische matrix te construeren.
- d) ★★ Maak gebruik van \boxed{a} om een nilpotente matrix van index 2 te construeren.

2. In de Atlantische Oceaan bevindt er zich een kleine archipel van 5 eilandjes. Tussen de vijf eilandjes vaart er op regelmatige tijdstippen een boot, zoals aangeduid op de hiernaast staande graaf.

- a) ★ Stel de directe wegenmatrix op die bij deze graaf hoort.
- b) ★ Bereken op hoeveel manieren je van B naar C kan gaan met één tussenstop.
- c) ★ Bereken op hoeveel manieren je van B terug naar B kan gaan met twee tussenstops.
- d) ★★ Is het mogelijk van elk eiland naar elk ander eiland te gaan met hoogstens één tussenstop. Bewijs je antwoord.



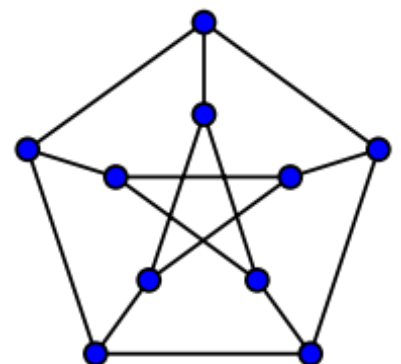
(ook al zijn de antwoorden op sommige van deze vragen ook zonder behulp van matrices heel eenvoudig te vinden is het uiteraard de bedoeling dat je matrices gebruikt in je oplossing).

3. ★★★ Een sterk reguliere graaf is er graaf waarbij elke top met evenveel andere toppen is verbonden en waarbij je vanuit elke top naar elke andere top een uniek pad kunt maken met hoogstens één tussenstop.

Je ziet hiernaast een sterk reguliere graaf met 10 toppen, de zogenaamde *Petersen-graaf*.

Noem D de directe wegenmatrix die bij de Petersen-graaf hoort.

Beredeneer dat $D^2 + D - 2 \cdot I_{10} = J_{10}$, met J_{10} de vierkante 10×10 matrix die bestaat uit allemaal enen.



4. Een fokker van paarden wil weten wat de invloed is van zijn jaarlijkse verkoop van (volwassen) dieren op zijn kudde. Het aantal paarden dat jaarlijks geboren wordt is 50% van de volwassen populatie van het jaar voordien (volwassen wil zeggen dat het dier ouder is dan één jaar). 20% van de jonge dieren en van de volwassenen sterft, terwijl 60% van de volwassen dieren verkocht wordt.

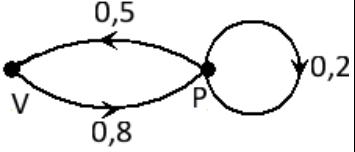
We veronderstellen dat er aanvankelijk 70 jonge veulens en 70 volwassen paarden zijn.

- ★ Stel de evolutie voor met een graaf.
 - ★ Bereken met behulp van matrices het aantal jonge en volwassen paarden na 4 jaar.
 - ★ Toon aan dat de kudde uitsterft als de fokker op deze manier doorgaat.
 - ★★★ Hoeveel procent van zijn volwassen dieren mag hij verkopen opdat er een stabiele situatie zou ontstaan?
 - ★★ Naar welke populatie evolueert de kudde in dit geval?
5. Bees, Mobiestaar en Proksimusj zijn de enige drie telefoonmaatschappijen in Apenland. Bees heeft 25% van de markt in handen, Mobiestaar 55% en Proksimusj 20%. Jaarlijks doet zich hetzelfde fenomeen voor:
- Bees verliest 5% van zijn klanten aan Mobiestaar en 10% aan Proksimusj.
 - Mobiestaar verliest 10% van zijn klanten aan Bees en 35% aan Proksimusj.
 - Proksimusj verliest ook 10% van zijn klanten aan Bees en 5% aan Mobiestaar.

De grootte van de markt blijft constant. Er 'verdwijnen' dus geen klanten.

- ★ Stel de evolutie van de markt voor in een graaf en bepaal de bijhorende matrix.
 - ★ Hoe zie je het gegeven dat er geen klanten verdwijnen vertaald in de matrix?
 - ★★ Treedt er na verloop van tijd marktevenwicht op? Bewijs je antwoord.
 - ★★★ Hangt dit marktevenwicht af van de beginsituatie of niet? Kan je dit ook aantonen?
6. Bewijs met behulp van de methode van volledige inductie dat $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Veel succes!

1.	<p>a) Voer gewoon het matrixproduct uit en controleer de uitkomst.</p> <p>b) Bedenk waarden voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zodat $a+d=1$ en $ad-bc=0$.</p> <p>c) Bedenk waarden voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zodat $a+d=0$ en $ad-bc=-1$.</p> <p>d) Bedenk waarden voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zodat $a+d=0$ en $ad-bc=0$.</p>
2.	<p>a) $D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$</p> <p>b) Op 2 manieren.</p> <p>c) Op 3 manieren.</p> <p>d) Van A naar E lukt niet.</p>
3.	<p>Tip: maak een onderscheid tussen elementen op de hoofddiagonaal en niet op de hoofddiagonaal.</p>
4.	<p>a) Zie rechts</p> <p>b) Ongeveer 18 veulens en 24 volwassen paarden.</p> <p>c) Kijk naar de populatie binnen 100 jaar.</p> <p>d) Dan mag hij slechts 20% verkopen.</p> <p>e) 45 veulens en 90 volwassen paarden.</p> 
5.	<p>a) $M = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{bmatrix}$</p> <p>b) Kijk naar de kolomtotalen.</p> <p>c) Ja, de situatie evolueert naar 40% voor Bees, 10% voor Mobjestaar en 50% voor Proksimusj.</p> <p>d) Nee, kijk daarvoor eens naar M^{100}.</p>
6.	<p>Routine.</p>