1. Zij gegeven een willekeurige 2×2-matrix $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, met $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

   a) Bewijs dat $A^2=(a+d).A-(ad-bc).I_2$

$$LL=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} RL &= (a+d).\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-(ad-bc).\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

   b) Maak gebruik van $\boxed{a}$ om een idempotente matrix te construeren.

$$A^2=A \Leftrightarrow (a+d).A-(ad-bc).I_2=A \Leftarrow \begin{cases} a+d=1 \\ ad-bc=0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a=4 \ \wedge \ d=-3 \\ b=6 \ \wedge \ c=-2 \end{cases}, \text{ dus } A=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

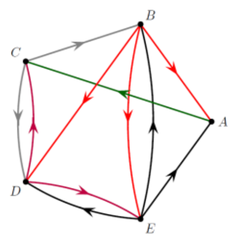
   c) Maak gebruik van $\boxed{a}$ om een involutorische matrix te construeren.

$$A^2=I_2 \Leftrightarrow (a+d).A-(ad-bc).I_2=I_2 \Leftarrow \begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=-1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a=4\wedge d=-4 \\ b=3\wedge c=-5 \end{cases}, \text{ dus } A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

   d) Maak gebruik van $\boxed{a}$ om een nilpotente matrix van index 2 te construeren.

$$A^2=O \Leftrightarrow (a+d).A-(ad-bc).I_2=O \Leftarrow \begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a=4\wedge d=-4 \\ b=2\wedge c=-8 \end{cases}, \text{ dus } A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. In de Atlantische Oceaan bevindt er zich een kleine archipel van 5 eilandjes. Tussen de vijf eilandjes vaart er op regelmatige tijdstippen een boot, zoals aangeduid op de hiernaast staande graaf.



   a) Stel de directe wegenmatrix op die bij deze graaf hoort.

$$D=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

   b) Bereken op hoeveel manieren je van B naar C kan gaan met één tussenstop.

$$D^2=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \Rightarrow \text{van } B \text{ naar } C \text{ kan dus op 2 manieren met één tussenstop}$$

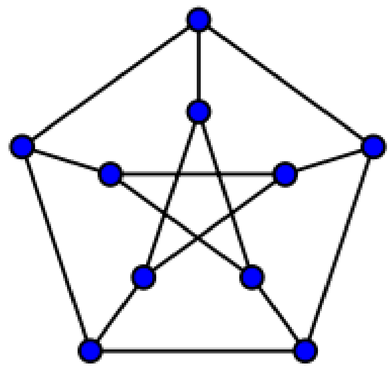
c) Bereken op hoeveel manieren je van B terug naar B kan gaan met twee tussenstops.

$$D^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \Rightarrow \text{van } B \text{ terug naar } B \text{ kan op 3 manieren met twee tussenstops.}$$

d) Is het mogelijk van elk eiland naar elk ander eiland te gaan met hoogstens één tussenstop. Bewijs je antwoord.

$$D^2 + D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \Rightarrow \text{Het is niet mogelijk om van } A \text{ naar } E \text{ te gaan op die manier.}$$

3. Een sterk reguliere graaf is er graaf waarbij elke top met evenveel andere toppen is verbonden en waarbij je vanuit elke top naar elke andere top een uniek pad kunt maken met hoogstens één tussenstop.
Je ziet hiernaast een sterk reguliere graaf met 10 toppen, de zogenaamde *Petersen-graaf*.
Noem D de directe wegenmatrix die bij de Petersen-graaf hoort.
Beredeneer dat $D^2 + D - 2.I_{10} = J_{10}$, met J_{10} de vierkante 10×10 matrix die bestaat uit allemaal enen.



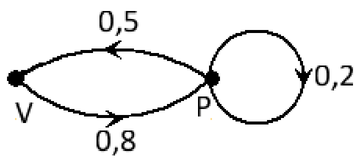
Noem $A = \left[a_{ij}\right] = D^2 + D - 2.I_{10}$. We tonen aan dat $\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., 10\} : a_{ij} = 1$.

- Neem $i = j$, dan is a_{ij} het aantal mogelijke manieren om via hoogstens één tussenstop van een top naar zichzelf te gaan (vanwege $D^2 + D$) verminderd met twee (vanwege $-2.I_{10}$). Je kan duidelijk altijd op drie manieren van een top naar een andere top en weer teruggaan. En $3 - 2 = 1$.
- Neem $i \neq j$. Dan volgt uit de definitie dat het element op rij i en kolom j van de matrix $D^2 + D$ gelijk is aan 1 (*vanuit elke top moet je naar elke andere top een uniek pad kunnen maken met hoogstens één tussenstop*). En $I_{ij} = 0$ als $i \neq j$, zodat ook nu $a_{ij} = 1 - 2.0 = 1$.

4. Een fokker van paarden wil weten wat de invloed is van zijn jaarlijkse verkoop van (volwassen) dieren op zijn kudde. Het aantal paarden dat jaarlijks geboren wordt is 50% van de volwassen populatie van het jaar voordien (volwassen wil zeggen dat het dier ouder is dan één jaar). 20% van de jonge dieren en van de volwassenen sterft, terwijl 60% van de volwassen dieren verkocht wordt.

We veronderstellen dat er aanvankelijk 70 jonge veulens en 70 volwassen paarden zijn.

a) Stel de evolutie voor met een graaf (V = veulens en P = paarden).



b) Bereken met behulp van matrices het aantal jonge en volwassen paarden na 4 jaar.

De Lesliematrix wordt gegeven door $L = \begin{array}{cc} V & P \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} V \\ P \end{array}$. De beginpopulatie is $P_0 = \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \end{bmatrix}$.

Voor de populatie na 4 jaar geldt dus: $P_4 = L^4 \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 18,2 \\ 24,08 \end{bmatrix}$.

Ongeveer 18 veulens en 24 volwassen paarden.

c) Toon aan dat de kudde uitsterft als de fokker op deze manier doorgaat.

Kijken we 100 jaar verder in de tijd dan vinden we $P_{100} = L^{100} \cdot P_0 \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) Hoeveel procent van zijn volwassen dieren mag hij verkopen opdat er een stabiele situatie zou ontstaan?

Neem als Lesliematrix daartoe dus $L' = \begin{array}{cc} V & P \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,8 & 0,8-p \end{bmatrix} \begin{array}{c} V \\ P \end{array}$

Wil er een evenwicht ontstaan dan bestaat er dus een $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, zodat $L' \cdot P = P$, waarbij P uiteraard verschillend is van een nulmatrix.

Dit geeft: $L' \cdot P = P \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,8 & 0,8-p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5y = x \\ 0,8x + (0,8-p)y = y \end{cases}$

Substitutie geeft: $0,8.0,5y + (0,8-p)y = y \Leftrightarrow 0,2y = p.y$. Omdat $y \neq 0$, moet dus $p = 0,2$.

Hij mag dus maar 20% van zijn volwassen dieren verkopen.

e) Naar welke populatie evolueert de kudde in dit geval?

Kijken we nu 100 jaar verder in de tijd dan vinden we $P_{100} = L'^{100} \cdot P_0 \approx \begin{bmatrix} 45 \\ 90 \end{bmatrix}$. De populatie wordt dus stabiel bij 45 veulens en 90 volwassen paarden.

5. Bees, Mobiestaar en Proksimusj zijn de enige drie telefoonmaatschappijen in Apenland. Bees heeft 25% van de markt in handen, Mobiestaar 55% en Proksimusj 20%. Jaarlijks doet zich hetzelfde fenomeen voor:

- Bees verliest 5% van zijn klanten aan Mobiestaar en 10% aan Proksimusj.
- Mobiestaar verliest 10% van zijn klanten aan Bees en 35% aan Proksimusj.
- Proksimusj verliest ook 10% van zijn klanten aan Bees en 5% aan Mobiestaar.

De grootte van de markt blijft constant. Er 'verdwijnen' dus geen klanten.

a) Stel de evolutie van de markt voor in een graaf en bepaal de bijhorende matrix.

De graaf is eenvoudig, de matrix $M = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{bmatrix}$, met $P_0 = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,55 \\ 0,20 \end{bmatrix}$

b) Hoe zie je het gegeven dat er geen klanten verdwijnen vertaald in de matrix?

Het totaal per kolom is 1.

c) Treedt er na verloop van tijd marktevenwicht op? Bewijs je antwoord.

Berekenen we bijvoorbeeld de situatie na 100 jaar, dan vinden we:

$P_{100} = M^{100}.P_0 \approx \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,10 \\ 0,50 \end{bmatrix}$. Dit is wel degelijk een evenwichtssituatie, want $\begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,10 \\ 0,50 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,10 \\ 0,50 \end{bmatrix}$.

d) Hangt dit marktevenwicht af van de beginsituatie of niet? Kan je dit ook aantonen?

Nee, want $M^{100} \approx \begin{bmatrix} 0,40 & 0,40 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,10 \\ 0,50 & 0,50 & 0,50 \end{bmatrix}$, dus ongeacht welke beginsituatie $P_0 = \begin{bmatrix} b \\ m \\ p \end{bmatrix}$ je hebt, de populatie zal altijd naar dezelfde situatie evolueren want (aangezien $b+m+p=1$):

$$P_{100} = M^{100}.P_0 \approx \begin{bmatrix} 0,40 & 0,40 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,10 \\ 0,50 & 0,50 & 0,50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ m \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40.(b+m+p) \\ 0,10.(b+m+p) \\ 0,50.(b+m+p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,10 \\ 0,50 \end{bmatrix}.$$

6. Bewijs met behulp van de methode van volledige inductie dat $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\underline{n=1}$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{OK}$

<u>Inductiestap</u>: stel dat $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, geldt dan ook dat $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -n-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

$$LL = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1-n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = RL \quad \boxed{OK}$$