Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Rijen

1. Bewijs, gebruik makend van de definitie van eindige en oneindige limieten, dat:

   a) ★★ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5} = 1$ (en bereken vanaf welke $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $|u_n - 1| < \varepsilon = \frac{1}{100}$)

   b) ★★ $\lim\limits_{n\to+\infty} {}^2\log n = +\infty$ (en bereken vanaf welke $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $u_n > r = 100$)

   c) ★★ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2 - 4}{3n^2 + 2} = 2$ (en bereken vanaf welke $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $|u_n - 2| < \varepsilon = \frac{1}{1000}$)

2. ★ Schrijf als breuk: 1,9828282...

3. ★★ Bereken (en bewijs) het infimum en het supremum van de rij met voorschrift $u_n = \frac{6n}{2n-1}$.

4. ★★* Bewijs dat de rij, gedefinieerd door $u_{n+1} = \sqrt[3]{6 + 7 \cdot u_n}$ met $u_1 = 0$ convergeert en bereken de limiet.

5. De rij $u_n = 2n + 3^{-n}$ is stijgend. Bewijs dit.

6. Gary Holt heeft verzamelwoede wat CD's betreft. Zijn verzameling telt nu reeds 1000 CD's. Hij speekt af met zijn vrouw dat hij enkel nog CD's koopt als hij er ook verkoopt. Gary verkoopt elk jaar 12% van zijn CD's, maar koopt er ook elk jaar 150 aan.

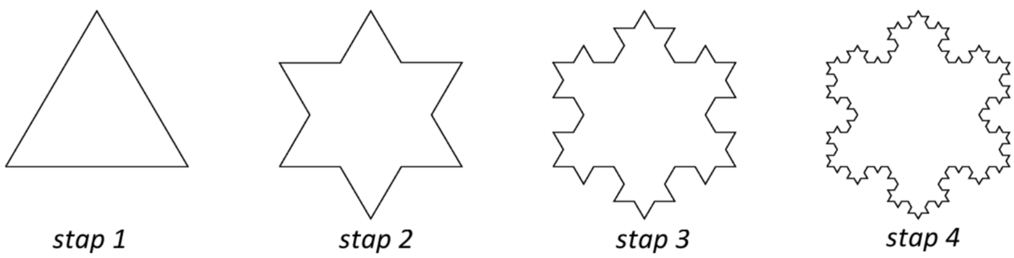
   a) ★ Stel het recursief voorschrift op van de rij c_n die aangeeft hoeveel CD's Gary heeft binnen n jaar.

   b) ★ Stel dat deze rij convergeert. Hoeveel CD's zal Gary op lange termijn hebben?

   c) ★★* Bewijs dat de rij convergeert door (met inductie) aan te tonen dat ze stijgt en naar boven begrensd is.

7. De *sneeuwvlok van Koch* is een meetkundige figuur die een fractaal wordt genoemd. Hij wordt opgebouwd door op de basisfiguur (een gelijkzijdige driehoek) steeds dezelfde constructie toe te passen: elke zijde van de figuur wordt in drie gelijke delen verdeeld en op het middelste deel construeer je (buitenwaarts) opnieuw een gelijkzijdige driehoek).

   Op de figuur hieronder zie je de eerste 4 stappen van deze constructie toegepast:



   De sneeuwvlok van Koch is de figuur die ontstaat door deze constructie oneindig veel toe te passen.

   a) ★* Bewijs dat de omtrek van deze figuur oneindig groot is.

   b) ★★★ Bereken de totale oppervlakte van de vlok (in functie van de oppervlakte van de eerste driehoek).

Veel succes!

Antwoorden (moeilijkheidsgraad ★: eenvoudig, ★★: gemiddeld, ★★★: lastig, ★★★★: erg moeilijk)

1.	a) Vanaf $n_0 = 162$ b) Vanaf $\mathrm{n}_0 = 1267650600228229401496703205377$ (of met je GRM: $n_0 \approx 1{,}26765.10^{30}$) c) Vanaf $n_0 = 52$
2.	$\dfrac{1963}{990}$
3.	Het supremum is 6 en het infimum is 3 (toon eerst aan dat de rij dalend en naar onder begrensd is).
4.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$
5.	Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_{n+1} - u_n > 0$
6.	a) $c_{n+1} = 0{,}88 \cdot c_n + 150$, met $c_0 = 1000$ b) Gary zal dus op termijn 1250 CD's bezitten.
7.	a) Tip: De rij die de omtrekken per stap weergeeft is meetkundig met $q > 1$. b) $S = \dfrac{8}{5} \cdot S_\Delta$