1. Bewijs, gebruik makend van de definitie van eindige en oneindige limieten, dat:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5} = 1$ (en bereken vanaf welke $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $|u_n - 1| < \varepsilon = \dfrac{1}{100}$)

Er geldt: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : n > n_0 \Rightarrow \left|\sqrt[n]{5} - 1\right| < \varepsilon$. We weten:

$\left|\sqrt[n]{5} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{5} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 5 < (\varepsilon + 1)^n \Leftrightarrow n > \dfrac{\log 5}{\log(\varepsilon + 1)}$. Kies dus $n_0 > \dfrac{\log 5}{\log(\varepsilon+1)}$, en het gestelde is bewezen!

Met $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ geldt dat $n_0 > 161,7472$. Dus vanaf de $162$e term liggen alle termen dichter dan $\dfrac{1}{100}$ bij 1.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} {}^2\log n = +\infty$ (en bereken vanaf welke $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $u_n > r = 100$)

Er geldt: $\lim\limits_{n\to+\infty} {}^2\log n = +\infty \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow {}^2\log x > r$. We weten:

${}^2\log n > r \Leftrightarrow n > 2^r$. Kies dus $n_0 > 2^r$ en het gestelde is bewezen.

Met $r = 100$ geldt dat $n_0 > 2^{100} = 1267650600228229401496703205376$.

Dus vanaf de $1267650600228229401496703205377$ e term zijn alle termen groter dan 100.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2-4}{3n^2+2} = 2$ (en bereken vanaf welke $n_0 \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $|u_n - 2| < \varepsilon = \dfrac{1}{1000}$)

Er geldt: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2-4}{3n^2+2} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : n > n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{6n^2-4}{3n^2+2} - 2\right| < \varepsilon$.

We weten: $\left|\dfrac{6n^2-4}{3n^2+2} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{-8}{3n^2+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{8}{3n^2+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{8-2\varepsilon}{3\varepsilon}}$.

Kies dus $n_0 > \sqrt{\dfrac{8-2\varepsilon}{3\varepsilon}}$ en het gestelde is bewezen. Met $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$ geldt dat $n_0 > 51,6333\ldots$ Dus vanaf de $52$e term liggen alle termen dichter dan $\dfrac{1}{1000}$ bij $2$.

2. Schrijf als breuk: 1,9828282...

$$1,9828282\ldots = 1,9 + \frac{82}{1000} + \frac{82}{100000} + \frac{82}{10000000} + \ldots = \frac{19}{10} + \frac{82/1000}{1-1/100} = \frac{1963}{990}$$

(Of: stel $x = 1,9828282\ldots$, dan is $10x = 19,828282\ldots$ en $1000x = 1982,8282\ldots$ zodat $990x = 1963$.)

3. Bereken (en bewijs) het infimum en het supremum van de rij met voorschrift $u_n = \dfrac{6n}{2n-1}$.

Er geldt $u_{n+1} - u_n = \dfrac{6(n+1)}{2(n+1)-1} - \dfrac{6n}{2n-1} = \dfrac{(6n+6)(2n-1) - 6n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \dfrac{-6}{(2n+1)(2n-1)} < 0$.

De rij $(u_n)$ is dus dalend. De eerste term $u_1 = 6$ is dus het maximum en het supremum van deze rij.

Het infimum van de rij is $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n}{2n-1} = 3$, want:

- $3$ is een ondergrens omdat $\dfrac{6n}{2n-1} \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{6n}{2n-1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2n-1} \geq 0$.
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : u_{n_0} < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{6n_0}{2n_0 - 1} < 3 + \varepsilon \overset{\cdots}{\Leftrightarrow} n_0 > \dfrac{3+\varepsilon}{2\varepsilon}$

4. Bewijs dat de rij, gedefinieerd door $u_{n+1} = \sqrt[3]{6 + 7 \cdot u_n}$ met $u_1 = 0$ convergeert en bereken de limiet.

Als de rij convergeert dan geldt voor de limiet $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ dat:

$L = \sqrt[3]{6+7L} \Leftrightarrow L^3 - 7L - 6 = 0 \Leftrightarrow L = 3 \vee \cancel{L = -1} \vee \cancel{L = -2}$ (Alle termen, dus ook de limiet, zijn positief).

Dat de rij convergeert doen we door aan te tonen dat de rij naar boven begrensd is en stijgend.

We bewijzen per inductie dat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n < 3$ en $u_{n+1} > u_n$

Voor $n = 1$ kloppen beide uitspraken, want $u_1 = 0 < 3$ en $u_2 = \sqrt[3]{6} > 0 = u_1$.

Stel nu dat $u_n < 3$ en $u_{n+1} > u_n$. We bewijzen dat hieruit volgt dat $u_{n+1} < 3$ en $u_{n+2} > u_{n+1}$.

- $u_n < 3 \Leftrightarrow 7 \cdot u_n < 21 \Leftrightarrow 6 + 7 \cdot u_n < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{6 + 7 \cdot u_n} < 3 \Leftrightarrow u_{n+1} < 3$
- $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow 7 \cdot u_{n+1} > 7 \cdot u_n \Leftrightarrow 7 \cdot u_{n+1} + 6 > 7 \cdot u_n + 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{7 \cdot u_{n+1} + 6} > \sqrt[3]{7 \cdot u_n + 6} \Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$ □

5. De rij $u_n = 2n + 3^{-n}$ is stijgend. Bewijs dit.

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : u_{n+1} - u_n = \left(2(n+1) + 3^{-(n+1)}\right) - \left(2n + 3^{-n}\right) = 2 + \dfrac{1}{3} 3^{-n} - 3^{-n} = 2 - \dfrac{2}{3} 3^{-n} > 0$ (want $3^{-n} < 1$).

6. ★★★ Gary Holt heeft verzamelwoede wat CD's betreft. Zijn verzameling telt nu reeds 1000 CD's. Hij speekt af met zijn vrouw dat hij enkel nog CD's koopt als hij er ook verkoopt. Gary verkoopt elk jaar 12% van zijn CD's, maar koopt er ook elk jaar 150 aan.

   a) Stel het recursief voorschrift op van de rij $c_n$ die aangeeft hoeveel CD's Gary heeft binnen $n$ jaar.

   $c_{n+1} = 0{,}88 \cdot c_n + 150$, met $c_0 = 1000$

   b) Stel dat deze rij convergeert. Hoeveel CD's zal Gary op lange termijn hebben?

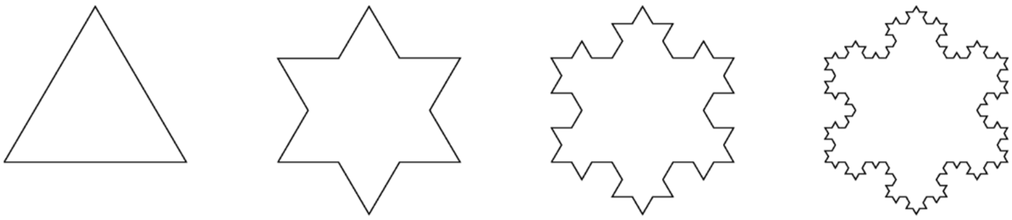
   Dan zal, met $L = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{n+1}$, gelden dat $L = 0{,}88 \cdot L + 150 \Leftrightarrow L = 1250$. Gary zal dus op termijn 1250 CD's bezitten.

   c) Bewijs dat de rij convergeert door met inductie aan te tonen dat ze stijgt en naar boven begrensd is.

   - $c_1 = 1000 < 1250$ en $c_n < 1250 \Leftrightarrow 0{,}88 \cdot c_n < 1100 \Leftrightarrow 0{,}88 \cdot c_n + 150 < 1250$
   - $c_1 = 1030 > 1000 = c_0$ en $c_{n+1} > c_n \Leftrightarrow 0{,}88 \cdot c_{n+1} + 150 > 0{,}88 \cdot c_n + 150 \Leftrightarrow c_{n+2} > c_{n+1}$ □

7. De *sneeuwvlok van Koch* is een meetkundige figuur die een fractaal wordt genoemd. Hij wordt opgebouwd door op de basisfiguur (een gelijkzijdige driehoek) steeds dezelfde constructie toe te passen: elke zijde van de figuur wordt in drie gelijke delen verdeeld en op het middelste deel construeer je (buitenwaarts) opnieuw een gelijkzijdige driehoek).

Op de figuur hieronder zie je de eerste 4 stappen van deze constructie toegepast:



*stap 1* *stap 2* *stap 3* *stap 4*

De sneeuwvlok van Koch is de figuur die ontstaat door deze constructie oneindig veel toe te passen.

a) Bewijs dat de omtrek van deze figuur oneindig groot is.

De omtrek per stap is een meetkundige rij met quotiënt $q=\frac{4}{3}$ (elke zijde wordt eerst in drie gehakt en een stukje worden er twee, dus 3 gelijke zijden worden er 4: _ _ _ => _/_). Deze rij divergeert naar $+\infty$.

b) Bereken de totale oppervlakte van de vlok (in functie van de oppervlakte van de eerste driehoek).

Stel dat de oppervlakte van de eerste driehoek $1$ is.

In de tweede stap komen er $3$ driehoekjes bij die $\frac{1}{9}$ zo groot zijn als het eerste driehoekje (Eigenschap: als een zijde $3$ keer kleiner wordt, dan wordt de oppervlakte $3^2=9$ keer kleiner).

In de derde stap komen er $12$ driehoekjes bij die weer $9$ keer kleiner zijn, in de vierde stap komen er $48$ driehoekjes bij die weer $9$ keer kleiner zijn, enz.

De totale oppervlakte is: $1+3\cdot\frac{1}{9}+12\cdot\frac{1}{81}+48\cdot\frac{1}{729}+\ldots=1+\frac{1/3}{1-4/9}=\frac{8}{5}$.

De oppervlakte zal dus in totaal slechts met 60% groeien.

(Zie ook: https://www.youtube.com/watch?v=PKbwrzkupaU)