Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Verloop van veeltermen, rationale en irrationale functies

1. Gegeven is de functie $f(x)=x^3-x^2+ax+1$, met parameter $a\in\mathbb{R}$.
   a) ★⋆ Voor welke $a\in\mathbb{R}$ heeft f geen extrema?
   b) ★ Voor welke $a\in\mathbb{R}$ staat de raaklijn in $x=2$ loodrecht op de rechte $r\leftrightarrow x+3y=0$?

2. ★★⋆ Een draad van 1m wordt in twee stukken geknipt. Met het ene stuk maak je een vierkant en met het andere stuk een gelijkzijdige driehoek.

   Waar moet je de draad doorknippen opdat de som van de oppervlaktes van vierkant en driehoek minimaal zou zijn?

3. ★★ Bepaal $a\in\mathbb{R}$, als de x-waarde waarvoor de functie $f(x)=x+\dfrac{1}{x+a}$ haar minimum bereikt het dubbele is van de x-waarde waarvoor ze haar maximum bereikt.

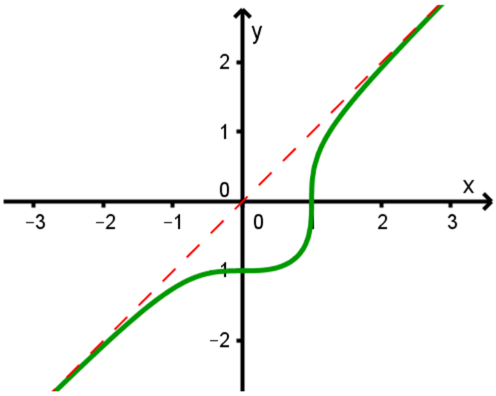
4. ★★ Bepaal $a,b\in\mathbb{R}_0$ zodat de grafiek van $f(x)=\dfrac{a}{x^2+b}$ het punt $P(-1,2)$ als buigpunt heeft.
   - ★ Bepaal in dat geval ook de vergelijking van de buigraaklijn in P.

5. Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{2x^2+2x\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$.
   a) ★ Bepaal het domein van deze functie.
   b) ★★ Bepaal de nulpunten van deze functie.
   c) ★★ De grafiek van deze functie heeft drie verschillende asymptoten. Bepaal hun vergelijking.

6. Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.
   a) ★⋆ Deze functie heeft twee verschillende horizontale asymptoten. Bepaal hun vergelijking.
   b) ★⋆ Bepaal het verloop van deze functie (stijgen en dalen) met behulp van de eerste afgeleide.
   c) ★★ Bewijs dat deze functie twee verschillende buigpunten heeft. Je hoeft ze niet te berekenen.

7. Gegeven zijn de functies $f_a : x\mapsto\dfrac{\sqrt{4x-a}}{x^2+1}$, met parameter $a\in\mathbb{R}$.
   a) ⋆ Bepaal het domein van deze functies.
   b) ★★ Bepaal voor welke waarde van de parameter a de grafiek een extremum bereikt voor $x=1$.
      - ⋆ Wat is de ordinaat van dit extremum?

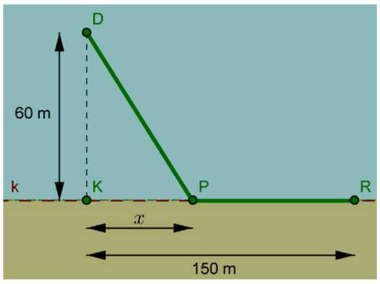
8. Gegeven is grafiek van de functie $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^3-1}$, en haar schuine asymptoot $s\leftrightarrow y=x$.



a) ★ Bewijs dat $f''\left(x\right)=\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^5}}$.

b) ★★ Bespreek in een samenvattende tabel het volledige verloop (stijgen/dalen, hol/bol) van de functie f.

9. ★★★ Een drenkeling (D) bevindt zich op 60 meter van de kust (k). Op 150 meter van het punt K (het punt op de kustlijn dichtst bij D) langs de kustlijn staat een redder (R). De redder kan tegen 2,6 m/s lopen over het strand en tegen 1 m/s naar de drenkeling toe zwemmen. Bepaal algebraïsch het ideale punt waarop de redder moet beginnen zwemmen (dus zodat de tijd die hij nodig heeft om de drenkeling te bereiken minimaal is).



Veel succes!

Antwoorden (moeilijkheidsgraad ★: eenvoudig, ★★: gemiddeld, ★★★: lastig, ★★★★: erg moeilijk)

<table>
<tr><td>1.</td><td>a) $a \geq \frac{1}{3}$ b) $a = -5$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Er moet worden doorgeknipt op ongeveer 56,5 cm en met het kleinste stuk moet het vierkant gevormd worden.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$a = -3$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$a = 8, b = 3$ en in dat geval is $t_b \leftrightarrow y = x + 3$.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>a) $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
b) $(-1,0)$ en $(0,0)$
c) $v \leftrightarrow x = 1$ is een verticale asymptoot
$h \leftrightarrow y = -1$ is een horizontale asymptoot
$s \leftrightarrow y = 4x + 5$ is een schuine asymptoot</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>a) Voor $x \to +\infty$ is de asymptoot de rechte met vergelijking $y = 2$,
Voor $x \to -\infty$ is de asymptoot de rechte met vergelijking $y = -2$.
b)
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td>MAX
$(\sqrt{5})$</td><td>↘</td><td></td></tr>
</table>
c) De tweede afgeleide heeft in de teller een tweedegraadsveelterm met positieve discriminant.</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>a) $dom\ f = \left[\frac{a}{4}, +\infty\right[$
b) Als $a = 2$ is de coördinaat van het extremum $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>a) Je kan wat rekenwerk uitsparen door in te zien dat $\sqrt[3]{\left(x^3 - 1\right)^2} = \left(x^3 - 1\right)^{2/3}$
b)
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>|</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td>BP
(-1)</td><td>↗</td><td>BP
(0)</td><td>↗</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>9.</td><td>De redder zal het snelst bij de drenkeling zijn als hij 125m loopt (dus als $x = 25$).</td></tr>
</table>