1. Gegeven is de functie $f(x)=x^3-x^2+ax+1$, met parameter $a\in\mathbb{R}$.

   a) Voor welke $a\in\mathbb{R}$ heeft $f$ geen extrema?

   Dan mag de afgeleide functie geen (enkelvoudige) nulpunten hebben. Hier is $f'(x)=3x^2-2x+a$.

   Er zijn dus geen extrema als en slechts als: $\Delta=4-12a\leq 0 \Leftrightarrow \boxed{a\geq \frac{1}{3}}$

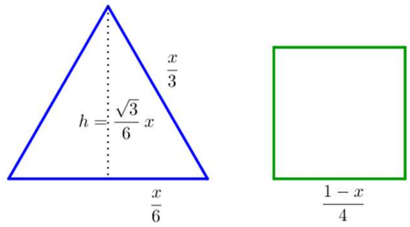
   b) Voor welke $a\in\mathbb{R}$ staat de raaklijn in $x=2$ loodrecht op de rechte met vergelijking $r\leftrightarrow x+3y=0$?

   De rico van de raaklijn in $x=2$ is $m_t=f'(2)=8+a$. De rico van $r$ is $m_r=-\frac{1}{3}$.

   $$t\perp r \Leftrightarrow m_t\cdot m_r=-1 \Leftrightarrow -\frac{8+a}{3}=-1 \Leftrightarrow \boxed{a=-5}$$

2. Een draad van 1m wordt in twee stukken geknipt. Met het ene stuk maak je een vierkant en met het andere stuk een gelijkzijdige driehoek.

   Waar moet je de draad doorknippen opdat de som van de oppervlaktes van vierkant en driehoek minimaal zou zijn?




   Stel dat je doorknipt op $x$ m, en met lengte $x$ een gelijkzijdige driehoek maakt (met omtrek $x$) en met lengte $1-x$ een vierkant (met omtrek $1-x$). De zijde van de driehoek is $\frac{x}{3}$ en van het vierkant $\frac{1-x}{4}$.

   Pythagoras geeft je de hoogte van de driehoek $h=\frac{\sqrt{3}}{6}x$, zodat $S_\Delta=\frac{\sqrt{3}}{36}x^2$ en uiteraard $S_\square=\left(\frac{1-x}{4}\right)^2$.

   Dan is $S(x)=S_\Delta+S_\square=\frac{\sqrt{3}}{36}x^2+\left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \Rightarrow S'(x)=\frac{\sqrt{3}}{18}x-\frac{1-x}{8}=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x-9}{72}$.

   $$S'(x)=0\Leftrightarrow \left(9+4\sqrt{3}\right)x-9=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\approx 0{,}56504$$

| $x$ | $0$ | $\frac{9}{9+4\sqrt{3}}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | - | 0 | + |
| $S(x)$ | ↘ | MIN | ↗ |

   Opdat de som van de oppervlakten minimaal zou zijn moet er dus worden doorgeknipt op ongeveer 56,5 cm en moet met het kleinste stuk het vierkant gevormd worden.

3. Bepaal $a\in\mathbb{R}$, als de $x$-waarde waarvoor de functie $f(x)=x+\frac{1}{x+a}$ haar minimum bereikt het dubbele is van de $x$-waarde waarvoor ze haar maximum bereikt.

   $f'(x)=1-\frac{1}{(x+a)^2}=\frac{x^2+2ax+a^2-1}{(x+a)^2}$. De nulpunten hiervan zijn $-a-1$ en $-a+1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-a-1$ | | $-a$ | | $-a+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | \| | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | MAX | ↘ | \| | ↘ | MIN | ↗ | |

   De functie $f$ bereikt dus een lokaal maximum als $x=-a-1$ en een lokaal minimum als $x=-a+1$

   Het gestelde geldt dus als $-a+1=2.(-a-1)\Leftrightarrow a=-3$ (het minimum is $(4,5)$ en het maximum $(2,1)$)

4. Bepaal $a,b\in\mathbb{R}_0$ zodat de grafiek van $f(x)=\dfrac{a}{x^2+b}$ het punt $P(-1,2)$ als buigpunt heeft.

$$f'(x)=\frac{-2ax}{\left(x^2+b\right)^2} \text{ en } f''(x)=\frac{-2a\left(x^2+b\right)^{\cancel{2}}+2ax\cdot 2\cancel{\left(x^2+b\right)}\cdot 2x}{\left(x^2+b\right)^{\cancel{4}3}}=2a\cdot\frac{3x^2-b}{\left(x^2+b\right)^3}.$$

Opdat $f$ een buigpunt heeft als $x=-1$ moet $f''(-1)=0 \Leftrightarrow 2a\cdot\dfrac{3-b}{(1+b)^3}=0 \Rightarrow \cancel{a=0}\vee b=3$.

$$f(-1)=2\Leftrightarrow \frac{a}{1+b}=2\Leftrightarrow\frac{a}{4}=2\Leftrightarrow a=8.$$

In dat geval geldt: $f(x)=\dfrac{8}{x^2+3}$, $f'(x)=\dfrac{-16x}{\left(x^2+3\right)^2}$ en $f''(x)=16\cdot\dfrac{3x^2-3}{\left(x^2+3\right)^3}$, zodat $f''$ wel degelijk een tekenwissel heeft in $x=-1$ zodat in dit geval $(-1,2)$ een buigpunt is.

- Bepaal in dat geval ook de vergelijking van de buigraaklijn in $P$.

  Dan is $f'(-1)=1$, zodat $t_b\leftrightarrow y=1\cdot(x+1)+2$ of eenvoudiger $t_b\leftrightarrow y=x+3$.

5. Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{2x^2+2x\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$.

a) Bepaal het domein van deze functie.

$$x\in dom\ f\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x+1\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq 1 \quad\Rightarrow dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

b) Bepaal de nulpunten van deze functie.

$$\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}=0\Leftrightarrow x\left(2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)=0\ \wedge\ x-1\neq 0.$$

Eén nulpunt is alvast duidelijk: $(0,0)$. Voor het andere nulpunt lossen we de vergelijking op:

$$2x+2\sqrt{x^2+x+1}=0\ \Leftrightarrow\ 2x=-2\sqrt{x^2+x+1}\quad (KV: x\leq 0)$$
$$\Leftrightarrow 4x^2=4\left(x^2+x+1\right)\ \Leftrightarrow\ x=-1$$

Het tweede nulpunt heeft dus als coördinaat $(-1,0)$.

c) De grafiek van deze functie heeft drie verschillende asymptoten. Bepaal hun vergelijking.

<u>VA:</u> $v\leftrightarrow x=1$ is een verticale asymptoot (pool van de functie).

<u>HA:</u> $h\leftrightarrow y=-1$ is een horizontale asymptoot, want:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}\cdot\frac{2x^2-2x\sqrt{x^2+x+1}}{2x^2-2x\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4-4x^2\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(2x^2-2x\sqrt{x^2+x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(-4-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\cancel{x^2}\cdot\left(2+2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{-4}{4}=-1$$

<u>SA:</u> $s \leftrightarrow y = 4x+5$ is een schuine asymptoot, want:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+x+1}}{x(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 4 \text{, en}$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+x+1}}{x-1} - 4x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+x+1}-\left(2x^2-4x\right)}{x-1} \cdot \frac{2x\sqrt{x^2+x+1}+\left(2x^2-4x\right)}{2x\sqrt{x^2+x+1}+\left(2x^2-4x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2\left(x^2+x+1\right)-\left(2x^2-4x\right)^2}{(x-1)\left(2x\sqrt{x^2+x+1}+\left(2x^2-4x\right)\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{20x^3-12x^2}{(x-1)\left(2x\sqrt{x^2+x+1}+\left(2x^2-4x\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(20-\frac{12}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right).\cancel{x^2}.\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(2-\frac{4}{x}\right)\right)} = \frac{20}{4} = 5$$

6. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Deze functie heeft twee verschillende horizontale asymptoten. Bepaal hun vergelijking.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\pm x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \pm 2$$

Dus als $x \to +\infty$ is de asymptoot $h_1 \leftrightarrow y = 2$, en voor $x \to -\infty$ is de asymptoot $h_2 \leftrightarrow y = -2$.

b) Bepaal het verloop van deze functie (stijgen en dalen) met behulp van de eerste afgeleide.

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}-(2x+1)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2\left(x^2+1\right)-(2x+1)x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{2-x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

Deze functie heeft duidelijk slechts één nulpunt ( $x=2$ ) en geen polen. Het tekenverloop gaat dus:

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | MAX ( $\sqrt{5}$ ) | ↘ |

c) Bewijs dat deze functie twee verschillende buigpunten heeft. Je hoeft ze niet te berekenen.

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-(2-x)\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{x^2+1}.\cancel{2}x}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{-\left(x^2+1\right)-(2-x).3x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}} = \frac{2x^2-6x-1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}$$

Deze functie heeft duidelijk twee verschillende nulpunten, want de discriminant van de teller is $44$.

Er zijn dus inderdaad twee verschillende buigpunten (bij $x = \dfrac{6\pm\sqrt{44}}{4}$).

7. Gegeven zijn de functies $f_a : x \mapsto \dfrac{\sqrt{4x-a}}{x^2+1}$, met parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Bepaal het domein van deze functies.

$$x \in dom\ f \Leftrightarrow 4x-a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{a}{4} \quad \Rightarrow \quad dom\ f = \left[\frac{a}{4}, +\infty\right[ .$$

b) Bepaal voor welke waarde van de parameter $a$ de grafiek een extremum bereikt voor $x=1$.

$$f'_a(x) = \frac{\dfrac{\cancel{4}2}{\cancel{2}\sqrt{4x-a}}\left(x^2+1\right) - 2x\sqrt{4x-a}}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x\left(4x-a\right)}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{4x-a}} = \frac{-6x^2+2ax+2}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{4x-a}}$$

$$f'_a(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-6+2a+2}{(1+1)^2\sqrt{4-a}} = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Dan is $f'(x) = \dfrac{-6x^2+4x+2}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{4x-2}}$, zodat $f'$ voor $x=1$ wel degelijk een tekenwissel heeft.

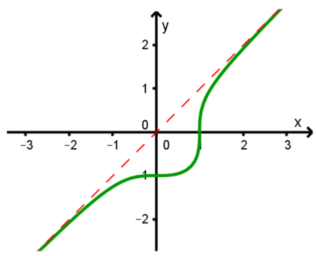
- Wat is de ordinaat van dit extremum?

$$f_2(1) = \frac{\sqrt{4.1-2}}{1^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. Gegeven is grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$, en haar schuine asymptoot $s \leftrightarrow y = x$.

a) Bewijs dat $f''(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^5}}$.

$$f'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}$$



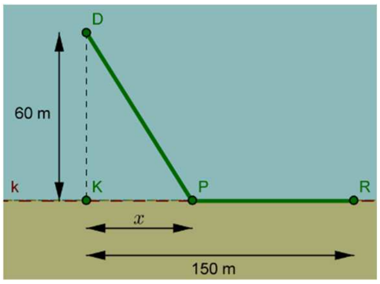

$$f''(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} = \frac{2x.\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2} - x^2\,\dfrac{2}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^4}} = \frac{2x.\left(x^3-1\right) - 2\cdot x^4}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^5}} = \frac{-2x}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^5}}$$

b) Bespreek in een tabel het volledige verloop (stijgen/dalen, hol/bol) van de functie $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | + | \| | + | |
| $f''(x)$ | | - | 0 | + | \| | - | |
| $f(x)$ | | ↗ | BP (-1) | ↗ | BP (0) | ↗ | |

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} = +\infty$$ $\Rightarrow$ de grafiek van $f$ heeft $x=1$ als verticale raaklijn in $(1,0)$

9. Een drenkeling (D) bevindt zich op 60 meter van de kust (k). Op 150 meter van het punt K (het punt op de kustlijn dichtst bij D) langs de kustlijn staat een redder (R). De redder kan tegen 2,6 m/s lopen over het strand en tegen 1 m/s naar de drenkeling toe zwemmen. Bepaal algebraïsch het ideale punt waarop de redder moet beginnen zwemmen (dus zodat de tijd die hij nodig heeft om de drenkeling te bereiken minimaal is).




Stel je $|KP| = x$ dan leid je eenvoudig af dat $|PR| = 150 - x$ en $|DP| = \sqrt{x^2 + 3600}$ (Pythagoras).

De tijd waarin de redder de drenkeling bereikt is dus: $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3600}}{1} + \dfrac{150-x}{2,6}$ ($\Delta t = \dfrac{\Delta s}{v}$).

Afleiden geeft: $t'(x) = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3600}} - \dfrac{1}{2,6}$.

$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3600}} = \dfrac{1}{2,6} \Leftrightarrow 2,6x = \sqrt{x^2+3600} \overset{\boxed{x>0}}{\Leftrightarrow} 6,76x^2 = x^2 + 3600 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3600}{5,76}$,

dus $x = \dfrac{60}{2,4} = 25$.

| $x$ | $-\infty$ | | 25 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $t(x)$ | | $\searrow$ | MIN $(113,08...)$ | $\nearrow$ | |

Antwoord: De redder zal het snelst bij de drenkeling zijn als hij 125m loopt. *(Hij zwemt dan 65m en doet er in totaal iets meer dan 113 seconden over.)*