1. Gegeven is de functie $f(x)=x^3-x^2+ax+1$, met parameter $a\in\mathbb{R}$.

a) Voor welke $a\in\mathbb{R}$ heeft f geen extrema?

Dan mag de afgeleide functie geen (enkelvoudige) nulpunten hebben. Hier is $f'(x)=3x^2-2x+a$.

Er zijn dus geen extrema als en slechts als: $\Delta=4-12a\le 0 \Leftrightarrow \boxed{a\ge\frac{1}{3}}$

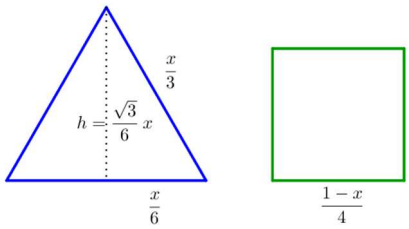
b) Voor welke $a\in\mathbb{R}$ staat de raaklijn in $x=2$ loodrecht op de rechte met vergelijking $r\leftrightarrow x+3y=0$?

De rico van de raaklijn in $x=2$ is $m_t=f'(2)=8+a$. De rico van r is $m_r=-\frac{1}{3}$.

$t\perp r \Leftrightarrow m_t\cdot m_r=-1 \Leftrightarrow -\frac{8+a}{3}=-1 \Leftrightarrow \boxed{a=-5}$

2. Een draad van 1m wordt in twee stukken geknipt. Met het ene stuk maak je een vierkant en met het andere stuk een gelijkzijdige driehoek.

Waar moet je de draad doorknippen opdat de som van de oppervlaktes van vierkant en driehoek minimaal zou zijn?



Stel dat je doorknipt op x m, en met lengte x een gelijkzijdige driehoek maakt (met omtrek x) en met lengte $1-x$ een vierkant (met omtrek $1-x$). De zijde van de driehoek is $\frac{x}{3}$ en van het vierkant $\frac{1-x}{4}$.

Pythagoras geeft je de hoogte van de driehoek $h=\frac{\sqrt{3}}{6}x$, zodat $S_\Delta=\frac{\sqrt{3}}{36}x^2$ en uiteraard $S_\square=\left(\frac{1-x}{4}\right)^2$.

Dan is $S(x)=S_\Delta+S_\square=\frac{\sqrt{3}}{36}x^2+\left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \Rightarrow S'(x)=\frac{\sqrt{3}}{18}x-\frac{1-x}{8}=\frac{(9+4\sqrt{3})x-9}{72}$.

$S'(x)=0 \Leftrightarrow (9+4\sqrt{3})x-9=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\approx 0{,}56504$

x	0	$\frac{9}{9+4\sqrt{3}}$	1
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	↘	MIN	↗

Opdat de som van de oppervlakten minimaal zou zijn moet er dus worden doorgeknipt op ongeveer 56,5 cm en moet met het kleinste stuk het vierkant gevormd worden.

3. Bepaal $a\in\mathbb{R}$, als de x-waarde waarvoor de functie $f(x)=x+\frac{1}{x+a}$ haar minimum bereikt het dubbele is van de x-waarde waarvoor ze haar maximum bereikt.

$f'(x)=1-\frac{1}{(x+a)^2}=\frac{x^2+2ax+a^2-1}{(x+a)^2}$. De nulpunten hiervan zijn $-a-1$ en $-a+1$.

x	$-\infty$	$-a-1$		$-a$		$-a+1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	||	-	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	||	↘	MIN	↗

De functie f bereikt dus een lokaal maximum als $x=-a-1$ en een lokaal minimum als $x=-a+1$

Het gestelde geldt dus als $-a+1=2.(-a-1) \Leftrightarrow a=-3$ (het minimum is $(4,5)$ en het maximum $(2,1)$)

4. Bepaal $a,b \in \mathbb{R}_0$ zodat de grafiek van $f(x)=\dfrac{a}{x^2+b}$ het punt $P(-1,2)$ als buigpunt heeft.

$$f'(x)=\frac{-2ax}{\left(x^2+b\right)^2} \text{ en } f''(x)=\frac{-2a\left(x^2+b\right)^{\cancel{2}}+2ax\cdot 2\cancel{\left(x^2+b\right)}\cdot 2x}{\left(x^2+b\right)^{\cancel{4}\,3}}=2a\cdot\frac{3x^2-b}{\left(x^2+b\right)^3}.$$

Opdat f een buigpunt heeft als $x=-1$ moet $f''(-1)=0 \Leftrightarrow 2a\cdot\dfrac{3-b}{(1+b)^3}=0 \Rightarrow \cancel{a=0} \vee b=3$.

$$f(-1)=2 \Leftrightarrow \frac{a}{1+b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{4}=2 \Leftrightarrow a=8.$$

In dat geval geldt: $f(x)=\dfrac{8}{x^2+3}$, $f'(x)=\dfrac{-16x}{\left(x^2+3\right)^2}$ en $f''(x)=16\cdot\dfrac{3x^2-3}{\left(x^2+3\right)^3}$, zodat f'' wel degelijk een tekenwissel heeft in $x=-1$ zodat in dit geval $(-1,2)$ een buigpunt is.

- Bepaal in dat geval ook de vergelijking van de buigraaklijn in P.

  Dan is $f'(-1)=1$, zodat $t_b \leftrightarrow y=1\cdot(x+1)+2$ of eenvoudiger $t_b \leftrightarrow y=x+3$.