

Voorbeeldoplossing van het voorbeeldexamen wiskunde in december

1.

- Dan schuift de parabool naar links.
- $f(\alpha) = \beta$, dit is uiteraard de top van de parabool.
- $x=0 \Rightarrow y = a.(0-\alpha)^2 + \beta = a.\alpha^2 + \beta$, dus het snijpunt is $S_y(0, a\alpha^2 + \beta)$.
- a en β moeten een verschillend teken hebben.
- $a > 0$ en $\alpha = 0$.

2. $\Delta = 1 - 4.(a^2 - a).[-(a^2 + a)] = 1 + 4a^4 - 4a^2 = 4a^4 - 4a^2 + 1 = (2a^2 - 1)^2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 - (2a^2 - 1)}{2(a^2 - a)} = \frac{-2a^2}{2(a-1)} = \frac{-a}{a-1}$$

$$\vee x = \frac{-1 + (2a^2 - 1)}{2(a^2 - a)} = \frac{2a^2 - 2}{2a(a-1)} = \frac{\cancel{2}(a-1)(a+1)}{\cancel{2}a(a-1)} = \frac{a+1}{a}$$

$$V = \left\{ \frac{-a}{a-1}, \frac{a+1}{a} \right\}$$

3. $\Delta = (3a+1)^2 - 4.2.(a^2 - 1) = 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 + 8 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$

$$x_1 = \frac{-(3a+1) - (a+3)}{4} = -a-1 \text{ en } x_2 = \frac{-(3a+1) + (a+3)}{4} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } 2x^2 + (3a+1)x + a^2 - 1 = 2(x+a+1)\left(x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\right) = (x+a+1)(2x+a-1)$$

4. De top is gegeven, dus we gebruiken de vorm: $f(x) = a.(x-5)^2 + 0 = a(x-5)^2$

$$\text{Het punt } P \in f \Leftrightarrow a.(0-5)^2 = 5 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$\text{Dus is het functievoorschrift: } f(x) = \frac{1}{5}(x-5)^2$$

5. De oppervlakte van het terras bedraagt: $(14+2x)(8+x) - 14.8 = 2x^2 + 30x$.

$$\text{De oppervlakte die de bouwheer zich kan veroorloven is } \frac{\text{€ } 7500}{\text{€ } 50/m^2} = 150 \text{ m}^2.$$

$$2x^2 + 30x = 150 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-15 + \sqrt{525}}{2} \approx 3,96 \vee x = \frac{-15 - \sqrt{525}}{2} \approx -18,96.$$

Antw.: De maximale breedte voor het terras bedraagt 3,96 m.

6. Snijpunten: $2x^2 - 2x - 6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{7}$

$$x = 1 + \sqrt{7} \Rightarrow y = (1 + \sqrt{7})^2 = 8 + 2\sqrt{7} \text{ en } x = 1 - \sqrt{7} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{7})^2 = 8 - 2\sqrt{7}$$

De snijpunten zijn dus $S_1(1 + \sqrt{7}, 8 + 2\sqrt{7})$ en $S_2(1 - \sqrt{7}, 8 - 2\sqrt{7})$.

7. Deze ongelijkheid is om te vormen tot het stelsel ongelijkheden:

$$\begin{cases} 3x \leq (x+1)(3x-4) \\ (x+1)(3x-4) \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 4x + 4 \leq 0 \\ 3x^2 - x - 10 \leq 0 \end{cases}$$

De nulpunten van $-3x^2 + 4x + 4$ zijn 2 en $\frac{-2}{3}$.

De nulpunten van $3x^2 - x - 10$ zijn $\frac{-5}{3}$ en $\frac{-2}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-2}{3}$	2	$+\infty$
$-3x^2 + 4x + 4$	-	-	0	+	-
$3x^2 - x - 10$	+	0	-	0	+

$$V = \left[\frac{-5}{3}, \frac{-2}{3} \right] \cup \{2\}$$

8.

a) De parabolen gaan allemaal door $(0, -6)$, dit omdat de constante term altijd -6 is.

b) Dan geldt: $8 = -2 \cdot 5^2 + 4m \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow m = \frac{16}{5}$

c) $P = \frac{c}{a} = 3$ (onafhankelijk van m).

d) Je weet al (wegens c) dat $x_1 \cdot x_2 = 3$, dus $-2 \cdot x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-3}{2}$.

e) Dan moet $a < 0$ en $\beta < 0$, dus $\frac{-(4m)^2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}{4 \cdot (-2)} < 0 \Leftrightarrow m^2 < 3 \Leftrightarrow m \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

f) Dit is onmogelijk want alle parabolen zijn bergparabolen.

g) Dan moet dus gelden dat: $\alpha = \beta \Leftrightarrow m = 2m^2 - 6 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = \frac{-3}{2}$

9. Het budget wordt gegeven door $1500 = 2x \cdot 100 + 2y \cdot 75 \Leftrightarrow y = 10 - \frac{4}{3}x$.

• De oppervlakte van het kadertje is dan $S_{\square} = xy = 10x - \frac{4}{3}x^2$

• We bepalen de top van de parabool S_{\square} : $\alpha = -\frac{b}{2a} = 3,75$ en $\beta = 10 \cdot 3,75 - \frac{4}{3} \cdot 3,75^2 = 18,75$.

De maximale oppervlakte is dus $18,75 \text{ cm}^2$, bij afmetingen $3,75 \text{ cm}$ op 5 cm .

10. Hier hebben we de twee wortels gegeven dus werken we met voorschrift $f(x) = a(x-1)(x-8)$.

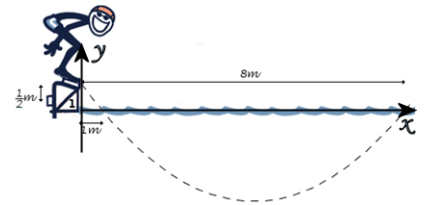
- Verder is $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in f \Leftrightarrow \frac{1}{2} = a \cdot (0-1)(0-8) \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$, dus is

$$f(x) = \frac{1}{16}(x-1)(x-8).$$

- Uit de symmetrie van de grafiek volgt dat $\alpha = \frac{9}{2}$ (het gemiddelde van de nulpunten).

$$\text{Dus is } \beta = f(\alpha) = \frac{1}{16} \left(\frac{9}{2} - 1 \right) \left(\frac{9}{2} - 8 \right) = \frac{-49}{64}.$$

Antwoord: het diepste punt is $-49/64$ m onder water.



11.

$$1. \sin \alpha = -0,9 \Leftrightarrow \alpha = -64^{\circ}09'29'' + k \cdot 360^{\circ} \vee \boxed{\alpha = -115^{\circ}50'31''} + k \cdot 360^{\circ}$$

zo aangeduid op de cirkel

$$2. y_B = \sin \beta, \text{ en we weten } \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - 0,64 = 0,36, \text{ dus } \boxed{\sin \beta = 0,6} \vee \sin \beta = -0,6$$

want $\beta \in I$

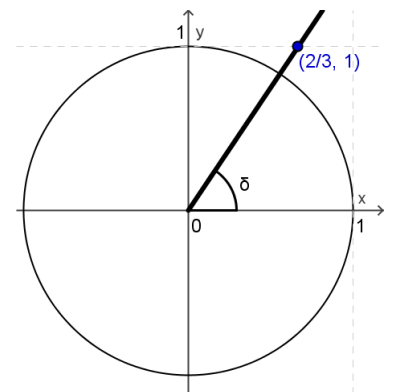
$$3. \text{ We weten } \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1}{0,49} - 1 = \frac{51}{49}, \text{ dus } \tan \theta = \sqrt{\frac{51}{49}} \cong 1,02020 \vee \boxed{\tan \theta \cong -1,02020}$$

want $\theta \in II$

$$4. m_{LL'} = \tan \lambda.$$

$$\tan^2 \lambda = \frac{1}{\cos^2 \lambda} - 1 = \frac{1}{0,81} - 1 = \frac{19}{81} \Leftrightarrow \tan \lambda = \overset{\lambda \in III}{\boxed{+}} \sqrt{\frac{19}{81}} \cong 0,48432$$

5. De meetkundige betekenis van de cotangens levert de oplossing (zie figuur).



12. Vermits we niet weten in welk kwadrant γ ligt, zullen de antwoorden niet eenduidig bepaald zijn.

$$\bullet \tan \gamma = \frac{1}{\cot \gamma} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{1}{\cos^2 \gamma} = 1 + \tan^2 \gamma = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sec \gamma = \frac{\sqrt{5}}{2} \vee \sec \gamma = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (naargelang } \gamma \in I \text{ of } \gamma \in III)$$

$$\bullet \cos \gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5} \vee \cos \gamma = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (naargelang } \gamma \in I \text{ of } \gamma \in III)$$

$$\bullet \sin \gamma = \tan \gamma \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \vee \sin \gamma = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (naargelang } \gamma \in I \text{ of } \gamma \in III)$$

$$\bullet \csc \gamma = \frac{1}{\sin \gamma} = \sqrt{5} \vee \csc \gamma = -\sqrt{5} \text{ (naargelang } \gamma \in I \text{ of } \gamma \in III)$$

13. Rechtstreeks toepassen van de geziene formules geeft:

$$\begin{aligned}
 LL &= \sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha) \cdot (-\sin \alpha) - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) \cdot (-\cos \alpha) \cdot \cos \alpha \\
 &= \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha \\
 &= \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (\text{merkwaardig product}) \\
 &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = RL \quad \square
 \end{aligned}$$

14. We lossen eerst de goniometrische vergelijking op zonder rekening te houden met de driehoek.

$$\begin{aligned}
 \sin(7\alpha) &= \sin(\alpha) && \text{Vermits } \alpha \text{ een hoek in een driehoek geldt} \\
 \Leftrightarrow 7\alpha &= \alpha + k \cdot 360^\circ \vee 7\alpha = 180^\circ - \alpha + k \cdot 360^\circ && \alpha \in \{60^\circ, 120^\circ, 22^\circ 30', 67^\circ 30', 112^\circ 30', 157^\circ 30'\} \\
 \Leftrightarrow 6\alpha &= k \cdot 360^\circ \vee 8\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \\
 \Leftrightarrow \alpha &= k \cdot 60^\circ \vee \alpha = 22^\circ 30' + k \cdot 45^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

15. We kunnen beide tekeningen samenvoegen tot:

In $\triangle TA'B'$:

$$|TA'| = \sqrt{|A'B'|^2 + |B'T|^2} \approx 535,318$$

$$\tan \widehat{TA'B'} = \frac{241}{478} \Leftrightarrow \widehat{TA'B'} \approx 26^\circ 45' 23''$$

In $\triangle TAA'$:

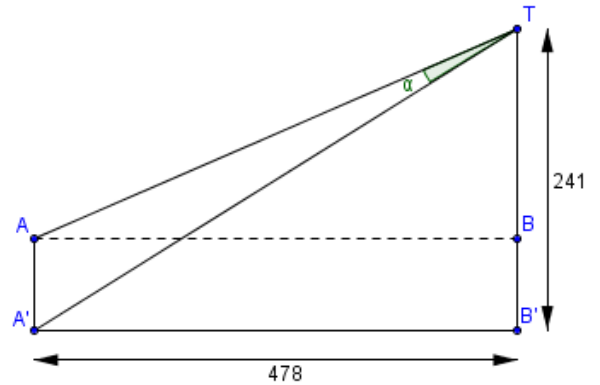
$$\widehat{AA'T} = 90^\circ - \widehat{TA'B'} \approx 63^\circ 14' 37''$$

$$\widehat{A'AT} = 180^\circ - \widehat{AA'T} - \alpha \approx 108^\circ 33' 23''$$

$$\text{Sinusregel: } \frac{|AA'|}{\sin \alpha} = \frac{|TA'|}{\sin \widehat{A'AT}}$$

$$\Leftrightarrow |AA'| \approx \frac{535,318 \cdot \sin(8^\circ 12')}{\sin(108^\circ 33' 23'')} \approx 80,54$$

Antw.: Het gebouw is ongeveer 80,54m hoog.



© Scott Adams, Inc./Dist. by UFS, Inc.