

2) Kegelsneden (in basisvorm)

In dit hoofdstuk werken we altijd in een Euclidisch geïkt assenstelsel.

a) De parabool

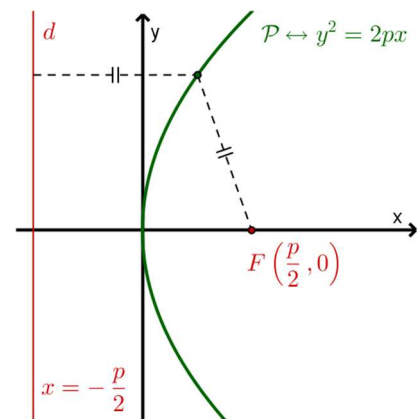
Definitie

De *parabool* is de meetkundige plaats van de punten waarvoor de afstand tot een gegeven punt F gelijk is aan de afstand tot een gegeven rechte d . Dat punt F wordt het *brandpunt* of *focus* genoemd. De rechte d wordt de *richtlijn* of *directrix* genoemd.

Cartesische vergelijking

Noem de parabool $\mathcal{P}$. We kiezen het brandpunt $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ op de positieve x -as (dus met $p > 0$) en $d \leftrightarrow x = -\frac{p}{2}$ als richtlijn loodrecht op de x -as. Dan geldt, met $P(x, y)$:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow |PF| = d(P, d) \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2px} \end{aligned}$$



We noemen dit de topvergelijking van de parabool.

Deze parabool heeft de oorsprong als top en de x -as als as (van symmetrie). De y -as noemen we de topaaklijn van $\mathcal{P}$.

Bespreking van de parabool als functie

De topvergelijking van de parabool valt uiteen in twee functies $f_1(x) = \sqrt{2px}$ en $f_2(x) = -\sqrt{2px}$, omdat geldt: $y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \sqrt{2px} \vee y = -\sqrt{2px}$. Omdat $f_2(x) = -f_1(x)$ zullen de grafieken van f_1 en f_2 elkaars spiegelbeeld zijn om de x -as. We bespreken hier enkel functie f_1 , met $p > 0$.

Domein: $\text{dom } f_1 = \mathbb{R}^+$ (de functie is ook overal in $\mathbb{R}^+$ continu)

Asymptoten: geen, want $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$.

Afgeleiden:

$$f_1(x) = \sqrt{2px}$$

$$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$$

$$f_1''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2p^2}{\sqrt{(2px)^3}} = -\frac{p}{2\sqrt{2px^3}}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	///	0	+
$f_1''(x)$	///	0	-
$f_1(x)$	///	0	↗

Constructie van de parabool

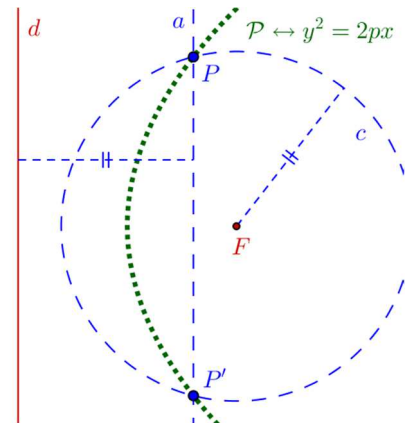
Methode 1: gebruik makend van brandpunt en richtlijn

Stap 1: teken een rechte a evenwijdig met de richtlijn d op een gekozen afstand.

Stap 2: teken de cirkel c met middelpunt F en als straal diezelfde gekozen afstand.

Stap 3: de snijpunten P en P' van a en c zijn punten van de parabool $\mathcal{P}$ met brandpunt F en richtlijn d

Bewijs: per constructie geldt dat $|FP| = d(P, d)$ en $|FP'| = d(P', d)$. $\square$



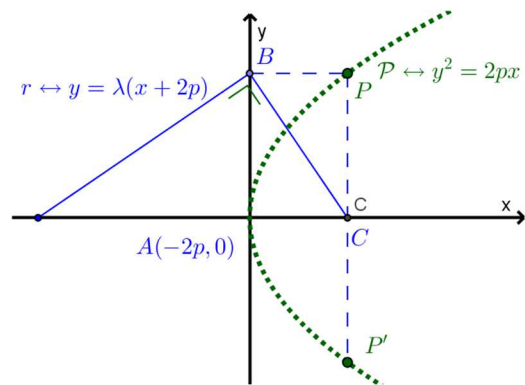
Methode 2: uitgaande van de topvergelijking

Stap 1: neem op de x -as het punt $A(-2p, 0)$.

Stap 2: teken door A een rechte r die de y -as snijdt in punt B .

Stap 3: teken op r de loodlijn l door B die de x -as snijdt in punt C .

Stap 4: het punt P met dezelfde abscis als C en dezelfde ordinaat als B zal dan op de parabool met vergelijking $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$ liggen.



Bewijs: Noem λ de rico van rechte r door A , dan geldt $r \leftrightarrow y = \lambda(x + 2p)$ en dus $B(0, 2p\lambda)$.

Als $\lambda = 0$ dan vallen B en C samen en heb je de top van de parabool.

Als $\lambda \neq 0$ dan geldt $BC \leftrightarrow y = -\frac{1}{\lambda}x + 2p\lambda$ en dus $C(2p\lambda^2, 0)$.

Dan is dus $P(2p\lambda^2, 2p\lambda)$, en laat dat nu net de parametervergelijking zijn van $\mathcal{P}$ (zie onder). $\square$

Een extra punt P' kan dan uiteraard snel gevonden worden door P te spiegelen om de x -as.

Parametervergelijking

In oefeningen is het vaak handiger om met een parametervergelijking van een parabool te werken. Je rekent eenvoudig na dat de parabool uit de vorige opgave als parameteraanpak heeft:

$$\mathcal{P} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2p\lambda^2 \\ y = 2p\lambda \end{cases}$$

Zo geldt voor alle waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ dat $P(2p\lambda^2, 2p\lambda) \in \mathcal{P}$, als $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$.

Raaklijnen

We stellen de vergelijking op van de raaklijn t in punt $P(x_1, y_1)$ van de parabool $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$.

Beschouw $\mathcal{P}$ weer als de vereniging van twee functies $f_1(x) = \sqrt{2px}$ en $f_2(x) = -\sqrt{2px}$. Dan geldt voor de afgeleiden (we stellen eerst $x_1 \neq 0$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Als } y_1 > 0: f_1'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}} \Rightarrow f_1'(x_1) = \frac{p}{\sqrt{2px_1}} = \frac{p}{y_1} \\ \text{Als } y_1 < 0: f_2'(x) = \frac{-p}{\sqrt{2px}} \Rightarrow f_2'(x_1) = \frac{-p}{\sqrt{2px_1}} = \frac{p}{y_1} \end{array} \right\} \text{ in beide gevallen geldt } m_t = \frac{p}{y_1}$$

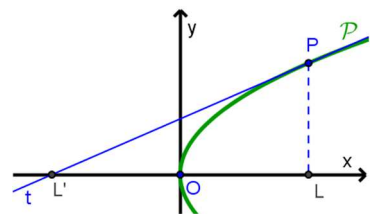
$$\text{Dus geldt: } t \leftrightarrow y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \Leftrightarrow yy_1 - \underbrace{y_1^2}_{2px_1} = px - px_1 \Leftrightarrow \boxed{yy_1 = p(x + x_1)}.$$

Deze laatste vergelijking geldt overigens ook als $x_1 = 0$, want dan is $t \leftrightarrow x = 0$.

Constructie van de raaklijn

Om de raaklijn aan een punt $P(x_1, y_1) \in \mathcal{P}$, met $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$ te construeren volstaat het dat punt P te verbinden met het spiegelpunt L' van zijn loodrechte projectie L op de x -as.

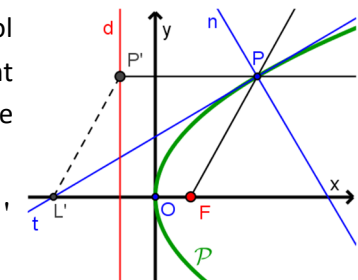
Uit de vorige paragraaf volgt namelijk dat de raaklijn de x -as snijdt in het punt $L'(-x_1, 0)$.



De hoofdeigenschap van de parabool

Stelling: De raaklijn t en de normaal n in een punt P van een parabool $\mathcal{P}$ zijn de bissectrices van de rechte die P verbindt met het brandpunt F van de parabool en de rechte door P evenwijdig met de as van de parabool.

Bewijs: Noem P' de projectie van P op de richtlijn d van $\mathcal{P}$ en L' het snijpunt van t met de x -as (zie figuur).



Stel nu $P(x_1, y_1)$ en $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ dan geldt wegens het voorgaande dat $L'(-x_1, 0)$ en $P'\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$.

Per definitie geldt dat $PP' \perp FL'$ maar het is ook duidelijk dat $|PP'| = |FL'| = \left|x_1 + \frac{p}{2}\right|$.

De vierhoek $PP'L'F$ is dus een parallellogram maar omdat P op $\mathcal{P}$ ligt geldt ook $|PP'| = |PF|$. Dus de vierhoek $PP'L'F$ is een ruit, zodat $t = PL'$ de bissectrice is van PP' en PF . De andere bissectrice door P staat er loodrecht op en is dus per definitie de normaal. $\square$

Andere vormen van de basisvergelijking

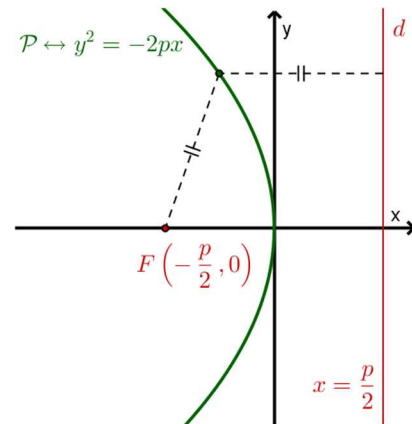
Hadden we het assenstelsel anders gekozen dan verkregen we uiteraard ook andere vergelijkingen. We bekijken hier enkele andere voor de hand liggende keuzes (met telkens $p \in \mathbb{R}_0^+$):

Mogelijkheid 2

Kies als brandpunt $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ en als richtlijn $d \leftrightarrow x = \frac{p}{2}$.

Dan wordt de vergelijking $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = -2px$.

De x -as is de symmetrieas en de topraaklijn is de y -as.



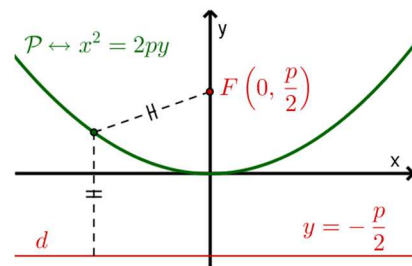
Mogelijkheid 3

Kies als brandpunt $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ en als richtlijn $d \leftrightarrow y = -\frac{p}{2}$.

Dan wordt de vergelijking $\mathcal{P} \leftrightarrow x^2 = 2py$.

De y -as is de symmetrieas en de topraaklijn is de x -as.

(Het is deze vorm die we herkennen uit de vierdes)

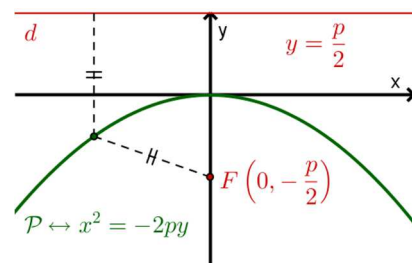


Mogelijkheid 4

Kies als brandpunt $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ en als richtlijn $d \leftrightarrow y = \frac{p}{2}$.

Dan wordt de vergelijking $\mathcal{P} \leftrightarrow x^2 = -2py$.

De as is $a \leftrightarrow y = 0$ en de topraaklijn is de x -as.



b) De ellips

Definitie

De ellips is de meetkundige plaats van de punten waarvoor de som van de afstanden tot twee vaste punten F_1 en F_2 gelijk is aan een strikt positief getal $2a$.

Deze punten F_1 en F_2 worden de *brandpunten* van de ellips genoemd.

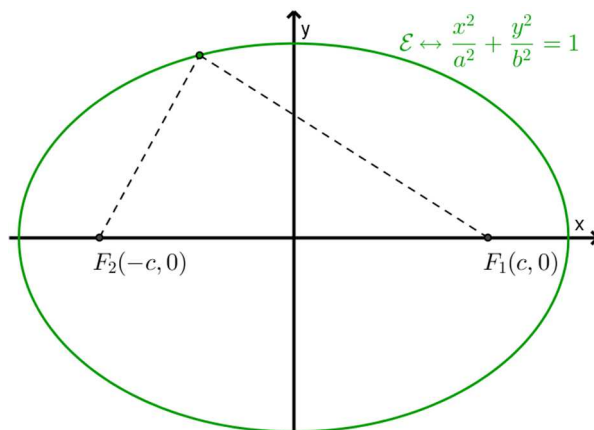
Cartesische vergelijking

We nemen het assenstelsel zo dat de brandpunten op de x -as liggen en dat de y -as de middelloodlijn is van het lijnstuk dat de brandpunten verbindt. Stel $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$.

Voor alle punten $P(x, y)$ van de ellips $\mathcal{E}$ moet dus gelden dat $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.

Uit de driehoeksongelijkheid volgt direct dat $2c = |F_1F_2| \leq |PF_1| + |PF_2| = 2a$, dus dat $c \leq a$.

Mocht $c = a$ dan is $\mathcal{E} = [F_1F_2]$ dus vanaf hier eisen we dat $c < a$.



$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow |PF_1| + |PF_2| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx) \cdot (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)} = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2) \\ &\Rightarrow \cancel{(x^2 + y^2 + c^2)^2} - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + \cancel{(x^2 + y^2 + c^2)^2} \\ &\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Stellen we hierin dan $a^2 - c^2 = b^2$ (dit kan omdat $a > c$), dan wordt dit:

$$P(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

We noemen dit de cartesische vergelijking van de ellips $\mathcal{E}$.

Om ook de omgekeerde pijl af te leiden moeten we nog aantonen dat $2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2) \geq 0$.

Uit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ volgt dat $\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$ en dat $\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \leq b^2$. Lid aan lid optellen geeft:

$$x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 \leq a^2 + \underbrace{b^2 + c^2}_{=a^2} = 2a^2, \text{ zodat inderdaad } 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2) \geq 0.$$

Bespreking van de ellips als functie

De cartesische vergelijking van de ellips valt uiteen in twee functies $f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ en

$$f_2(x) = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ omdat geldt: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Omdat $f_2(x) = -f_1(x)$ zullen de grafieken van f_1 en f_2 elkaars spiegelbeeld zijn om de x -as. We bespreken hier enkel functie f_1 .

Domein: $\text{dom } f_1 = [-a, a]$ (de functie is ook overal in haar domein continu)

Asymptoten: geen

Afgeleiden:

$$f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f_1''(x) = \frac{-b \cdot \cancel{a} \sqrt{a^2 - x^2} - \cancel{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (-bx)}{a^2 (a^2 - x^2)} = \frac{-b(a^2 - x^2) - bx^2}{a^2 (a^2 - x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

x	$-a$			0	a		
$f_1'(x)$	///		+	0	-		///
$f_1''(x)$	///		-	-	-		///
$f_1(x)$	///	0		max (b)		0	///

Opm.: De grafiek heeft verticale raaklijnen in $x = -a$ en $x = a$.

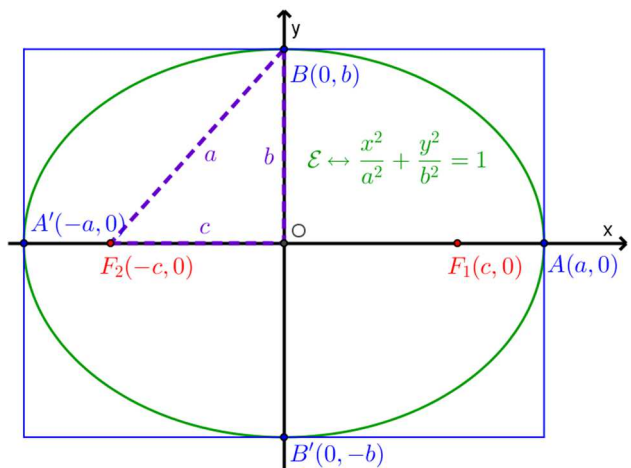
Verdere afspraken en definities

Stel $\mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, met $a > b > 0$.

De punten $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ en $B'(0, -b)$ noemen we de *toppen* van $\mathcal{E}$.

De rechten AA' en BB' noemen we in die volgorde de *grote* en de *kleine as* van $\mathcal{E}$.

De punten $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$ noemen we de *brandpunten* van $\mathcal{E}$, met $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.



De raaklijnen in de toppen (de *topraaklijnen*) vormen samen een rechthoek, die we de *assenrechthoek* van $\mathcal{E}$ noemen.

Het punt O is een symmetriemiddelpunt van de ellips $\mathcal{E}$. We zullen dit kortweg het *middelpunt* noemen.

De cirkel

Stellen we in de vergelijking van de ellips $a = b = r$ dan vinden we de vergelijking van een cirkel met middelpunt de oorsprong en straal r . We kunnen een cirkel dus beschouwen als speciaal geval van een ellips waarbij de twee brandpunten samenvallen in het middelpunt.

Constructie van de ellips

Uitgaande van de brandpunten en de constante $2a$

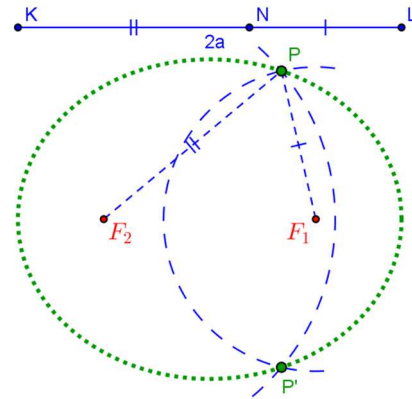
Stap 1: construeer een lijnstuk $[KL]$ met $|KL| = 2a$.

Stap 2: Kies een punt $N \in]KL[$.

Stap 3: Teken de cirkels $\mathcal{C}_{(F_1, |NL|)}$ en $\mathcal{C}'_{(F_2, |KN|)}$

Stap 4: De snijpunten P en P' van $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ zijn punten van $\mathcal{E}$ omdat per constructie geldt :

$$|PF_1| + |PF_2| = |NL| + |KN| = |KL| = 2a \text{ (idem voor } P').$$

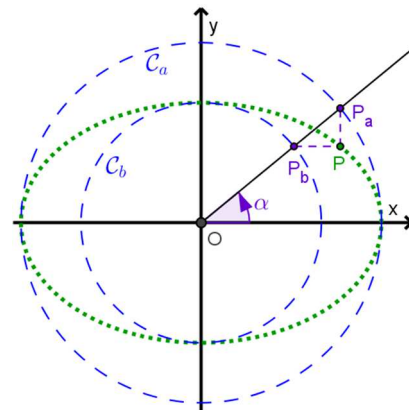


Uitgaande van de grote en kleine cirkel

Stap 1: Teken de grote cirkel $\mathcal{C}_a$ met middelpunt O en straal a en de kleine cirkel $\mathcal{C}_b$ met middelpunt O en straal b .

Stap 2: Teken een willekeurige halfrechte door O die de cirkels $\mathcal{C}_a$ en $\mathcal{C}_b$ snijdt in respectievelijk P_a en P_b .

Stap 3: Het punt P met dezelfde abscis als P_a en dezelfde ordinaat als P_b zal op de ellips $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ liggen.



Bewijs: Noem de hoek gevormd door de positieve x -as en de gekozen halfrechte α . Dan vinden we als coördinaten $P_a(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ en $P_b(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$. Dus geldt $P(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$. Het is eenvoudig om na te rekenen dat $P \in \mathcal{E}$. $\square$

(Je vindt eenvoudig drie extra punten door P te spiegelen om de x -as, y -as en oorsprong.)

De parametervergelijking van een ellips

Uit de tweede constructie volgt onmiddellijk dat $\mathcal{E} \leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos \alpha \\ y = b \sin \alpha \end{cases}$ een parametervergelijking is van

$\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. We stellen $\alpha \in [0, 2\pi[$. Voor een punt $P(a \cos \alpha, b \sin \alpha) \in \mathcal{E}$ wordt α de excentrische anomalie genoemd.

Raaklijnen aan een ellips

We stellen de vergelijking op van de raaklijn t in punt $P(x_1, y_1)$ van de ellips $\mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Beschouw $\mathcal{E}$ weer als de unie van twee functies $f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ en $f_2(x) = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$.

Als $y_1 > 0$, dan geldt dus dat $y_1 = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x_1^2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x_1^2} = \frac{ay_1}{b}$, en

als $y_1 < 0$, dan geldt dus dat $y_1 = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x_1^2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x_1^2} = -\frac{ay_1}{b}$.

Dan geldt voor de afgeleiden (we stellen eerst $y_1 \neq 0$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Als } y_1 > 0: f_1'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow f_1'(x_1) = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} \\ \text{Als } y_1 < 0: f_2'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow f_2'(x_1) = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} \end{array} \right\} \text{ in beide gevallen geldt } m_t = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Dus geldt voor de raaklijn t :

$$\begin{aligned} t \Leftrightarrow y - y_1 &= \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \Leftrightarrow a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2 \Leftrightarrow b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \underbrace{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}_{=1} \Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

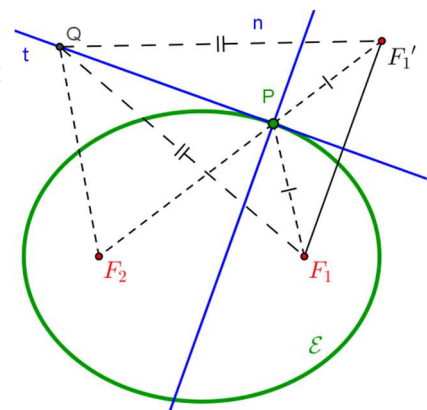
Deze laatste vergelijking geldt overigens ook als $y_1 = 0$ (en dus $x_1 = \pm a$), want dan is $t \Leftrightarrow x = \pm a$.

De hoofdeigenschap van de ellips (tevens een constructie voor raaklijnen)

Stelling: De raaklijn t en de normaal n in een punt P van een ellips $\mathcal{E}$ zijn de bissectrices van de rechten die P verbinden met de brandpunten F_1 en F_2 van de ellips.

Bewijs: Teken de bissectrices t en n van de rechten $F_1 P$ en $F_2 P$ (noem t de buitenbissectrice van P in $\triangle P F_1 F_2$). We bewijzen nu dat t de raaklijn is aan $\mathcal{E}$ in P .

Neem een willekeurig ander punt $Q \in t$ (met dus $Q \neq P$), en noem F_1' het spiegelbeeld van F_1 om t (zie figuur).



We weten dus dat $|PF_1| = |PF_1'|$ en dat $|QF_1| = |QF_1'|$.

Het is duidelijk dat $F_1' \in F_2 P$ omdat je eenvoudig narekent dat $\widehat{F_2 P F_1'} = 180^\circ$. Dan geldt er dat:

$$|QF_1| + |QF_2| = |QF_1'| + |QF_2| > |F_1' F_2| = |F_1' P| + |PF_2| = |F_1 P| + |PF_2| = 2a \Rightarrow Q \notin \mathcal{E}. \quad \square$$

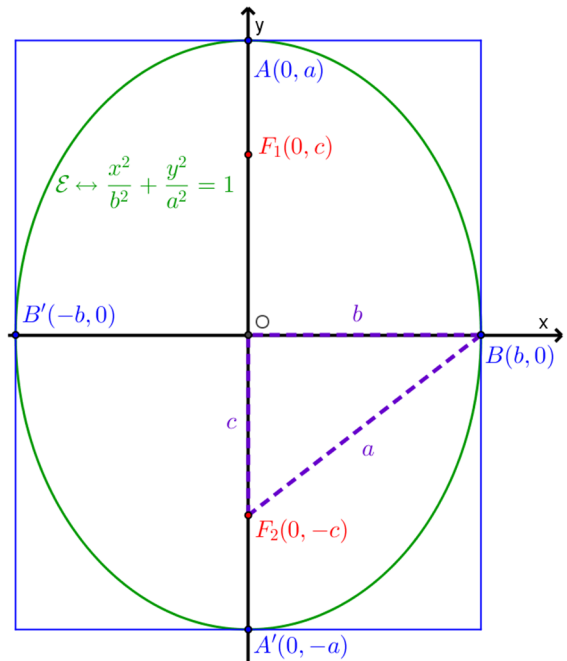
Andere vorm van de basisvergelijking

Hadden we het assenstelsel anders gekozen dan verkregen we uiteraard ook een andere vergelijking. We bekijken hier een andere voor de hand liggende keuze:

Kies het assenstelsel zo dat de brandpunten op de y -as liggen en dat de x -as de middelloodlijn is van het lijnstuk dat de brandpunten verbindt. Stel $F_1(0, c)$ en $F_2(0, -c)$.

Dan wordt de vergelijking $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$,

met $b^2 = a^2 - c^2$.



c) De hyperbool

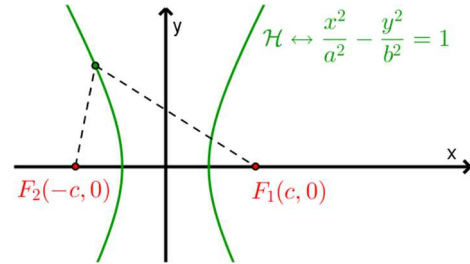
Definitie

De hyperbool is de meetkundige plaats van de punten waarvoor het verschil van de afstanden tot twee vaste punten F_1 en F_2 gelijk is aan een strikt positief getal $2a$.

Deze punten F_1 en F_2 worden de *brandpunten* van de hyperbool genoemd.

Cartesische vergelijking

We nemen het assenstelsel zo dat de brandpunten op de x -as liggen en dat de y -as de middelloodlijn is van het lijnstuk dat de brandpunten verbindt. Stel $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$.



Voor alle punten $P(x, y)$ van de ellips $\mathcal{H}$ moet dus gelden dat $\left|PF_2\right| - \left|PF_1\right| = 2a$.

Uit de driehoeksongelijkheid volgt direct dat $2c = |F_1F_2| \geq \left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| = 2a$, dus dat $a \leq c$.

Mocht $c = a$ dan is $\mathcal{H}$ de verzameling van alle punten van de x -as behalve $[F_1F_2]$ dus vanaf hier eisen we dat $a < c$.

$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \left|PF_2\right| - \left|PF_1\right| = 2a \Leftrightarrow \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \\
 &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx) \cdot (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)} = 4a^2 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2 = \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} \\
 &\Rightarrow \cancel{(x^2 + y^2 + c^2)^2} - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4a^4 = \cancel{(x^2 + y^2 + c^2)^2} - 4c^2x^2 \\
 &\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

Stellen we hierin dan $c^2 - a^2 = b^2$ (dit kan omdat $a < c$), dan wordt dit :

$$P(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

We noemen dit de cartesische vergelijking van de hyperbool $\mathcal{H}$.

Om ook de omgekeerde pijl af te leiden moeten we nog aantonen dat $(x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2 \geq 0$.

Uit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ volgt dat $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$ en per afspraak was $c^2 > a^2$. Lid aan lid optellen geeft:

$$x^2 + c^2 \geq 2a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + c^2 \geq 2a^2, \text{ zodat inderdaad } (x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2 \geq 0.$$

Bespreking van de hyperbool als functie

De cartesische vergelijking van de hyperbool valt uiteen in twee functies $f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$ en

$f_2(x) = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$, omdat geldt: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$.

Omdat $f_2(x) = -f_1(x)$ zullen de grafieken van f_1 en f_2 elkaars spiegelbeeld zijn om de x -as. We bespreken hier enkel functie f_1 .

Domein: $\text{dom } f_1 =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ (de functie is ook overal in haar domein continu)

Asymptoten: De functie heeft geen verticale asymptoten, maar wel twee schuine asymptoten:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2/x^2}}{1} = -\frac{b}{a}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} \cdot x = \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} \cdot (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} = 0$$

Als $x \rightarrow -\infty$ is de S.A. dus $s_1 \Leftrightarrow y = -\frac{b}{a}x$. Analoog vind je voor $x \rightarrow +\infty$ de S.A. $s_2 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}x$.

Afgeleiden:

$$f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$f_1''(x) = \frac{b \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{bx}{\sqrt{x^2 - a^2}^2} \cdot bx}{a^2(x^2 - a^2)} = \frac{b(x^2 - a^2) - bx^2}{a^2(x^2 - a^2) \cdot \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$$

x	$-\infty$	$-a$		a	$+\infty$
$f_1'(x)$			///		
$f_1''(x)$	-		///		+
$f_1(x)$	$\searrow$	0	///	0	$\nearrow$

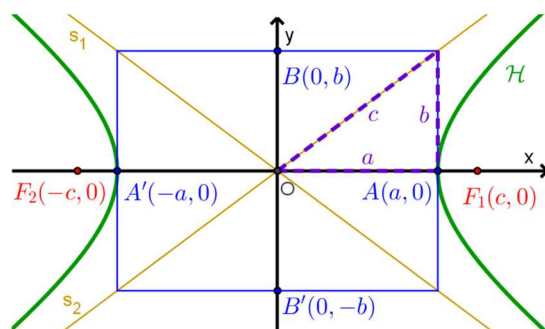
Opm.: De grafiek heeft verticale raaklijnen in $x = -a$ en $x = a$.

Verdere afspraken en definities

$$\text{Stel } \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De punten $A(a, 0)$ en $A'(-a, 0)$ noemen we de toppen van $\mathcal{H}$.

De rechte AA' noemen we de hoofdas van $\mathcal{H}$. De rechte BB' , met $B(0, b)$ en $B'(0, -b)$, noemen we de nevenas van $\mathcal{H}$.



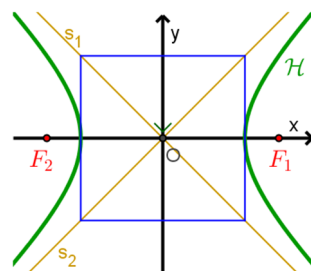
De punten $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$ noemen we de *brandpunten* van $\mathcal{H}$, met $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

De raaklijnen in de toppen (de *topraaklijnen*) vormen samen met de rechten door B en B' , evenwijdig aan de hoofdas, een rechthoek, die we de *assenrechthoek* van $\mathcal{H}$ noemen. De asymptoten s_1 en s_2 gaan door de hoekpunten van de assenrechthoek.

Het punt O is een symmetriemiddelpunt van $\mathcal{H}$. We zullen dit kortweg het *middelpunt* noemen.

De gelijkzijdige hyperbool

Stellen we in de vergelijking van de hyperbool $a = b$ dan spreken we van een *gelijkzijdige of orthogonale hyperbool*. In dat geval is de assenrechthoek een vierkant en staan de asymptoten loodrecht op elkaar.



Constructie van de hyperbool

Uitgaande van de brandpunten en de constante $2a$

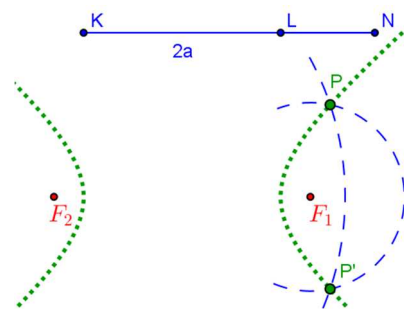
Stap 1: construeer een lijnstuk $[KL]$ met $|KL| = 2a$.

Stap 2: Kies een punt $N \in KL \setminus [KL]$.

Stap 3: Teken de cirkels $\mathcal{C}_{(F_2, |KN|)}$ en $\mathcal{C}'_{(F_1, |NL|)}$

Stap 4: De snijpunten P en P' van $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ zijn punten van $\mathcal{H}$ omdat per constructie geldt:

$$|PF_2| - |PF_1| = |KN| - |NL| = |KL| = 2a \text{ (idem voor } P').$$

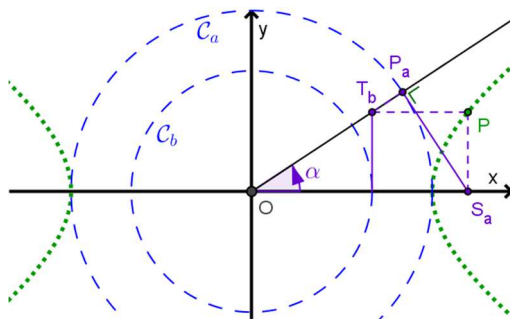


Uitgaande van de grote en kleine cirkel

Stap 1: Teken de cirkel $\mathcal{C}_a$ met middelpunt O en straal a en de cirkel $\mathcal{C}_b$ met middelpunt O en straal b .

Stap 2: Teken een willekeurige halfrechte door O die de cirkels $\mathcal{C}_a$ snijdt in P_a .

Stap 3: Trek in $B(b, 0)$ de raaklijn aan $\mathcal{C}_b$ en noem het snijpunt met de gekozen halfrechte T_b . Trek in P_a de raaklijn aan $\mathcal{C}_a$ en noem het snijpunt met de x -as S_a .



Stap 4: Het punt P met de abscis van S_a en de ordinaat van T_b zal op $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ liggen.

Bewijs: Noem de hoek gevormd door de positieve x -as en de gekozen halfrechte α . Dan vinden we als coördinaten $P_a(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ en $T_b(b, b \tan \alpha)$.

Voor de raaklijn t aan C_a in P_a geldt: $t \leftrightarrow \frac{a \cos \alpha \cdot x}{a^2} + \frac{a \sin \alpha \cdot y}{a^2} = 1$. Deze rechte snijdt de x -as ($y = 0$) in het punt $S_a(a \sec \alpha, 0)$. Dus geldt $P(a \sec \alpha, b \tan \alpha)$. Je rekt na dat $P \in \mathcal{H}$. $\square$

(Je vindt eenvoudig drie extra punten door P te spiegelen om de x -as, y -as en oorsprong.)

De parametervergelijking van een hyperbool

Uit de tweede constructie volgt onmiddellijk dat $\mathcal{H} \leftrightarrow \begin{cases} x = a \sec \alpha \\ y = b \tan \alpha \end{cases}$ een parametervergelijking is van

$\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. We nemen $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$. Het eerste interval geeft de rechtertak van de hyperbool, het tweede interval geeft de linkertak.

Raaklijnen aan een hyperbool

We stellen de vergelijking op van de raaklijn t in punt $P(x_1, y_1)$ van de ellips $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Beschouw $\mathcal{H}$ weer als de unie van twee functies $f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$ en $f_2(x) = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$.

Als $y_1 > 0$, dan geldt dus dat $y_1 = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x_1^2 - a^2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{ay_1}{b}$, en

als $y_1 < 0$, dan geldt dus dat $y_1 = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{x_1^2 - a^2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 - a^2} = -\frac{ay_1}{b}$.

Dan geldt voor de afgeleiden (we stellen eerst $y_1 \neq 0$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Als } y_1 > 0: f_1'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow f_1'(x_1) = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \\ \text{Als } y_1 < 0: f_2'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow f_2'(x_1) = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \end{array} \right\} \text{ in beide gevallen geldt } m_t = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Dus geldt voor de raaklijn t :

$$t \leftrightarrow y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \Leftrightarrow a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 \Leftrightarrow b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2$$

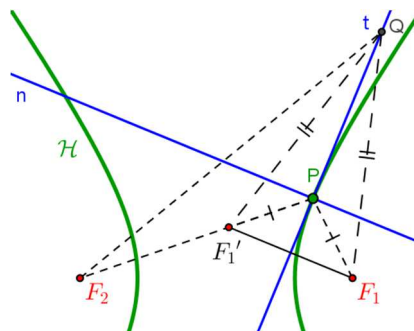
$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = \underbrace{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}_{=1} \Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Deze laatste vergelijking geldt overigens ook als $y_1 = 0$ (en dus $x_1 = \pm a$), want dan is $t \leftrightarrow x = \pm a$.

De hoofdeigenschap van de hyperbool (tevens een constructie voor raaklijnen)

Stelling: De raaklijn t en de normaal n in een punt P van een hyperbool $\mathcal{H}$ zijn de bissectrices van de rechten die P verbindt met de brandpunten F_1 en F_2 van de hyperbool.

Bewijs: Teken de bissectrices t en n van de rechten F_1P en F_2P (noem t de binnenbissectrice van P in $\triangle PF_1F_2$). We bewijzen nu dat t de raaklijn is aan $\mathcal{H}$ in P .



Neem een willekeurig ander punt $Q \in t$ (met dus $Q \neq P$), en noem F_1' het spiegelbeeld van F_1 om t (zie figuur).

We weten dus dat $|PF_1| = |PF_1'|$ en dat $|QF_1| = |QF_1'|$.

Het is duidelijk dat $F_1' \in F_2P$ omdat $(\widehat{F_2PF_1} = \widehat{F_1'PF_1})$. Dan geldt er dat :

$$|QF_2| - |QF_1| = |QF_2| - |QF_1'| < |F_1'F_2| = |PF_2| - |PF_1'| = |PF_2| - |PF_1| = 2a \Rightarrow Q \notin \mathcal{H}. \quad \square$$

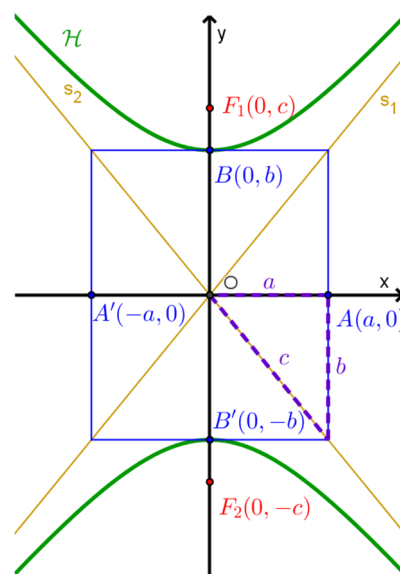
Andere vorm van de basisvergelijking

Hadden we het assenstelsel anders gekozen dan verkregen we uiteraard ook een andere vergelijking. We bekijken hier een andere voor de hand liggende keuze:

Kies het assenstelsel zo dat de brandpunten op de y -as liggen en dat de x -as de middelloodlijn is van het lijnstuk dat de brandpunten verbindt. Stel $F_1(0, c)$ en $F_2(0, -c)$.

$$\text{Dan wordt de vergelijking } \mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

$$\text{met } b^2 = a^2 + c^2.$$



Toegevoegde hyperbolen

$$\text{De hyperbolen } \mathcal{H}_1 \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ en } \mathcal{H}_2 \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

noemen we toegevoegde hyperbolen. Ze hebben dezelfde asymptoten.

