Cursus analytische meetkunde

L A

GEOMETRIE.

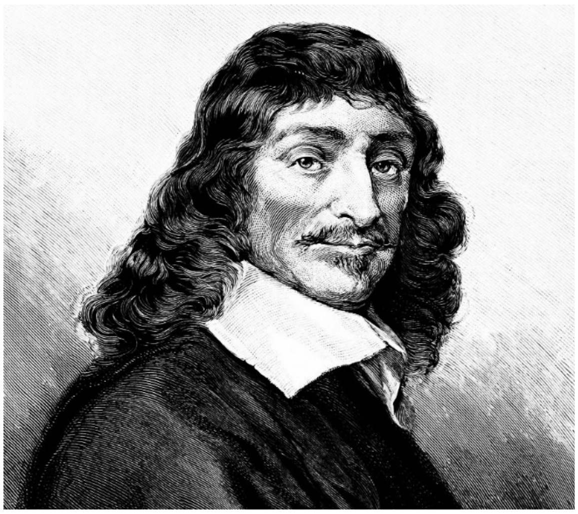
LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision: Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

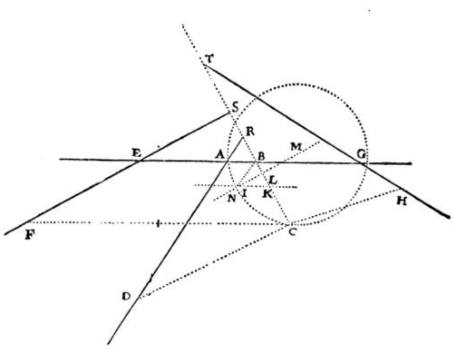


René Déscartes

° 31 mei 1596 – La Haye en Touraine (Frankrijk)

✝ 11 februari 1650 – Stockholm (Zweden)

334 LA GEOMETRIE.

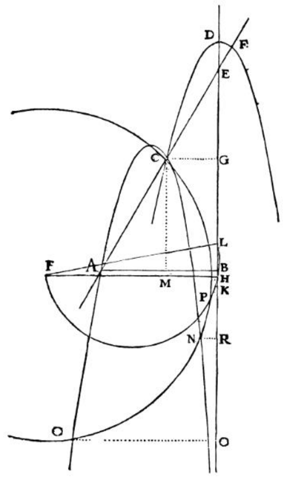


pour IM, & $\sqrt{1\frac{2}{3}}$ pour NM, & pourceque *aam* qui est $\frac{3}{4}$ est icy esgal à *pzz* & que l'angle ILC est droit, on trouue que la ligne courbe NC est vn cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en mesme sorte.

Quels sont les lieux plans, & solides: & la façon de les trouuer.

Au reste a cause que les equations, qui ne montent que iusques au quarré, sont toutes comprises en ce que ie viens d'expliquer; non seulement le problesme des anciens en 3 & 4 lignes est icy entierement acheué; mais aussy tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la composition des lieux solides; & par consequent aussy a celle des lieux plans, a cause qu'ils sont compris dans les solides. Car ces lieux ne sont autre chose, sinon que lors qu'il est question de trouuer quelque point auquel il manque

410 LA GEOMETRIE.



$\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{pVv}{nn}}$, IP ou IC est,

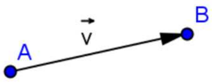
$\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{pVv}{nn}}$, a cause aussy de l'angle droit IPL. Puis ayant fait CM perpendiculaire sur IH, IM est la difference qui est entre IH, & HM ou CG, c'est a dire entre $\frac{m}{nn}$, & y, en sorte que son quarré est tousiours $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, qui estant osté du quarré de

1) Herhaling

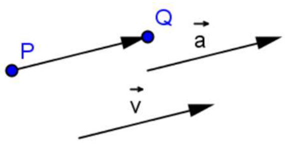
a) Vectoren

Definities en notaties

Een *vector* is een wiskundige grootheid die een grootte, een richting en een zin heeft. In het vlak kunnen we vectoren voorstellen als een pijl tussen twee punten. We noteren een vector bepaald door *beginpunt* A en *eindpunt* B meestal als $\overrightarrow{AB}$. Of onafhankelijk van deze punten als $\vec{v}$.



De grootte van een vector $\overrightarrow{AB}$ noteren we als $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, dit is de lengte van het corresponderende lijnstuk $|AB|$. De vector met lengte 0 noemen we de nulvector en noteren we met $\vec{0}$.

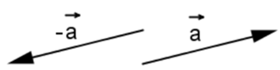


Bij de grafische voorstelling van een vector moet ook het beginpunt of *aangrijpingspunt* gekend zijn. Mag dit punt vrij gekozen worden, dan spreken we over *vrije vectoren* en in het andere geval van *gebonden vectoren*. Een vrije vector kan je beschouwen als een vector die je vrij kan verschuiven. Twee vectoren zijn gelijk als ze dezelfde grootte, richting en zin hebben. Zo geldt op de figuur hiernaast $\overrightarrow{PQ} = \vec{a} = \vec{v}$. Het zijn allemaal *representanten* van dezelfde vector.

Bewerkingen met vectoren

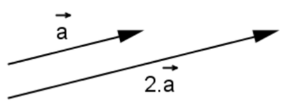
Tegengestelde van een vector

De *tegengestelde van een vector* is de vector met dezelfde grootte en richting maar tegengestelde zin. We noteren de tegengestelde vector van $\vec{a}$ uiteraard als $-\vec{a}$.



Product van een vector met een reëel getal

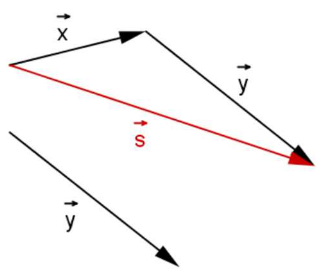
Vermenigvuldigen we een vector met een positief getal dan blijven richting en zin dezelfde maar vermenigvuldigen we de grootte van de vector met dat getal.



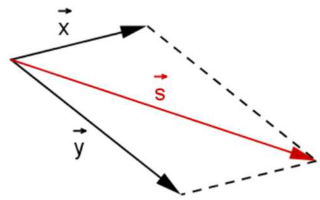
Som van twee vectoren

Om de *som van twee vectoren* $\vec{x}$ en $\vec{y}$ te bekomen moet je het beginpunt van $\vec{y}$ naar het eindpunt van $\vec{x}$ te verplaatsen. De som is dan de vector met als beginpunt dat van vector $\vec{x}$ en eindpunt dat van $\vec{y}$. Zo geldt op de figuur hiernaast dat $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y}$.

In de volksmond noemt men deze methode ook weleens de kop-staart methode.



Vaak wordt ook de *parallellogramregel* gebruikt om de som van twee vectoren te construeren. De som van twee vectoren is dan de diagonaal van het parallellogram met als zijden de twee vectoren.



Het is duidelijk dat voor vrije vectoren *de formule van Chasles-Mobius* geldt: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Verschil van twee vectoren

Per definitie stellen we $\vec{x}-\vec{y}=\vec{x}+\left(-\vec{y}\right)$

b) Affiene meetkunde

Het affiene vlak

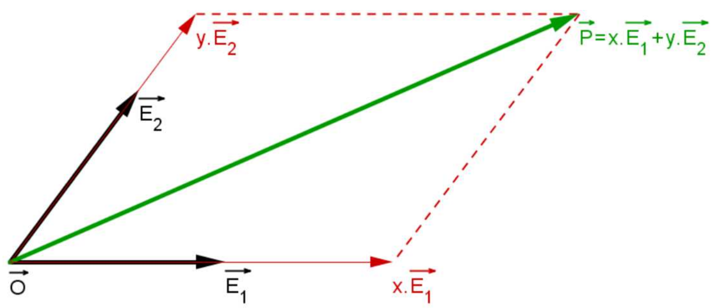
In wat volgt zullen we vrijwel altijd werken in een vlak Π, waar we de vectoren vaak zullen voorstellen door hun representant met als aangrijpingspunt de oorsprong. We noteren dit vlak dan ook met Π_O .

Een vector $\overrightarrow{OA}$ zullen we kortweg noteren als $\vec{A}$. Men spreekt in dit geval ook weleens van puntvectoren.

Kiezen we in dit vlak twee vectoren $\overrightarrow{E_1}$ en $\overrightarrow{E_2}$ met een verschillende richting dan kunnen we elk punt op een unieke manier schrijven als lineaire combinatie van die twee vectoren.

In symbolen: $\forall\vec{P},\exists x,y\in\mathbb{R}:\vec{P}=x.\overrightarrow{E_1}+y.\overrightarrow{E_2}$.

We noemen het bijhorende getallenkoppel (x,y) de coördinaat van $\vec{P}$ ten opzichte van het assenstelsel $O\overrightarrow{E_1}\overrightarrow{E_2}$.



We noemen het assenstelsel op deze manier *affien geijkt*, en noemen $O\overrightarrow{E_1}\overrightarrow{E_2}$ een *affiene ijk* van het vlak Π_O. Kortweg noemen we dit dan het affiene vlak Π_O .

Verband tussen puntvectoren en gebonden vectoren

Elke gebonden vector kunnen we schrijven als verschil van twee puntvectoren, en wel als volgt (volgt uit Chasles-Mobius): $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}-\vec{A}$

Zo kunnen we heel eenvoudig elke uitdrukking met vrije vectoren schrijven als een uitdrukking in gebonden vectoren.

De reële vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$

Door het invoeren van coördinaten ontstaat er een bijectie (één-één verband) tussen de verzameling vectoren $\mathcal{V}$ en de verzameling reële koppels $\mathbb{R}^2$. Ook de optelling van vectoren en het scalair product worden overgedragen van $\mathcal{V}$ naar $\mathbb{R}^2$, want:

- Som van twee vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$, met $co(\vec{v}_1) = (x_1, y_1)$ en $co(\vec{v}_2) = (x_2, y_2)$:

  $$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= x_1.\vec{E}_1 + y_1.\vec{E}_2 + x_2.\vec{E}_1 + y_2.\vec{E}_2 \\ &= (x_1 + x_2).\vec{E}_1 + (y_1 + y_2).\vec{E}_2 \end{aligned}$$

  Dus $co(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = co(\vec{v}_1) + co(\vec{v}_2)$

- Scalair product van $r \in \mathbb{R}$, met een vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$, met $co(\vec{v}) = (x, y)$:

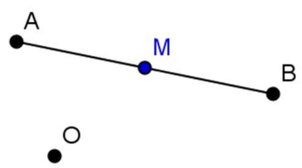
  $$r\vec{v} = r\left(x.\vec{E}_1 + y.\vec{E}_2\right) = rx.\vec{E}_1 + ry.\vec{E}_2$$

  Dus $co(r\vec{v}) = (rx, ry) = r.co(\vec{v})$

We kunnen dus besluiten dat ook de coördinatenruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$ een reële vectorruimte is (net zoals we dit in de ruimtemeetkunde bewezen voor een dimensie hoger).

Rekenen met puntvectoren

Midden van een lijnstuk



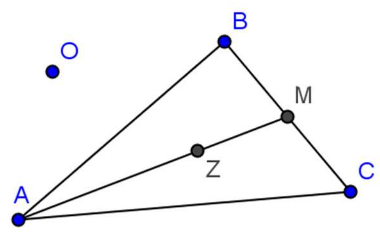
M is het midden van $[AB]$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \vec{M} - \vec{A} = \vec{B} - \vec{M} \Leftrightarrow \vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$$

Dus ook voor de coördinaten geldt:

$$co(\vec{M}) = \frac{co(\vec{A}) + co(\vec{B})}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Zwaartepunt van een driehoek



Z is het zwaartepunt van ΔABC:

$$\overline{AZ} = 2.\overline{ZM} \Leftrightarrow \vec{Z} - \vec{A} = 2\left(\vec{M} - Z\right) \Leftrightarrow 3\vec{Z} = \vec{A} + 2\vec{M}$$

Uit het voorgaande weten we dat $\vec{M} = \dfrac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$, dus

$$3\vec{Z} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \Rightarrow \vec{Z} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}.$$

Dus ook: $co(\vec{Z}) = \dfrac{co(\vec{A}) + co(\vec{B}) + co(\vec{C})}{3} \Rightarrow Z\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

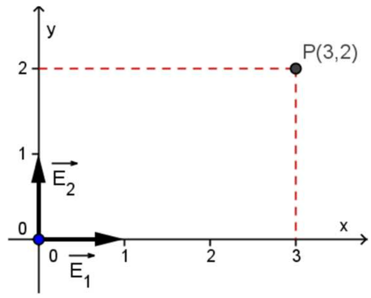
c) Euclidische meetkunde

Euclidische meetkunde

Alle ideeën tot nu toe maken deel uit van wat we vlakke affiene meetkunde noemen. Merk op dat we tot hiertoe nog nergens gebruik gemaakt hebben van hoeken (of loodrechte stand). Van zodra dit het geval is spreken we van *Euclidische meetkunde*.

Een *Euclidisch geijkt assenstelsel* is een assenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en gelijk geijkt zijn, we noteren de lengte van de eenheidsvectoren dan als $\left\|\overrightarrow{OE_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{OE_2}\right\| = 1$.

Wordt het vlak Π_O op deze manier geijkt dan spreken we soms kortweg van het *Euclidische vlak*.



De afstand tussen twee punten

Neem in het vlak Π een punt P_1 dat ten opzichte van een Euclidische ijk als coördinaat heeft $P(x_1, y_1)$. Dan geldt: $|OP| = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$ (wegens de stelling van Pythagoras)

In vectornotatie genoteerd geeft dit dus: $\left\|\vec{P}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$.

Voor de afstand tussen twee willekeurige punten $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$ leiden we dan af:

$$|P_1P_2| = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \left\|\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Het scalair product van twee vectoren

Def.: In een georthonormeerd assenstelsel definiëren we het *scalair product van twee vectoren* $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ en $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ als $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$.

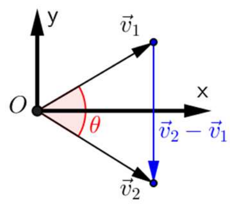
Noteren we nu met $\mathcal{V}_{\vec{o}}^2$ de verzameling van vectoren verschillend van de nulvector, dan geldt:

Stelling: $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}_{\vec{o}}^2 : \vec{v}_1.\vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right)$, met $\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}$ de ingesloten hoek van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.

Bewijs: In de driehoek opgespannen door de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$, geldt de cosinusregel, met $\theta = \widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}$:

$\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - 2.\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\theta$,

dus $2.\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\theta = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|^2$.



(Merk op dat deze formule – de cosinusregel – ook geldt in het geval dat $\theta = 0°$ of $\theta = 180°$, dus als $\overrightarrow{v_1}$ een veelvoud zou zijn van $\overrightarrow{v_2}$).

Met behulp van de afstandsformule die we net bewezen hebben kunnen we dit vereenvoudigen tot:

$$\begin{aligned} 2.\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\theta &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right) \\ &= 2x_1x_2 + 2y_1y_2 , \end{aligned}$$

waaruit onmiddellijk de gezochte formule volgt. □

We kunnen nu enkele heel eenvoudige eigenschappen opsommen:

- $\forall \vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{v}.\vec{o} = \vec{o}.\vec{v} = 0$
- $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}_{\vec{o}} : \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} : \vec{v}_1.\vec{v}_2 = \vec{v}_2.\vec{v}_1$
- $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}_{\vec{o}} : \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$

Cirkels

We stellen de vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(x_0, y_0)$ en straal r:

$$P(x,y) \in c \Leftrightarrow d(P,M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Omgekeerd is $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ een cirkel met $M(-a,-b)$ en $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

d) Rechten

De vergelijkingen van een rechte

Elke rechte r heeft een evenwijdige rechte r_O die door de oorsprong van het assenstelsel gaat. We noemen r_O de bijhorende *vectorrechte* bij die rechte r. Elk punt $\vec{R}$ van deze vectorrechte verschillend van de oorsprong bepaalt een puntvector die we een *richtingsvector* van de rechte r noemen.

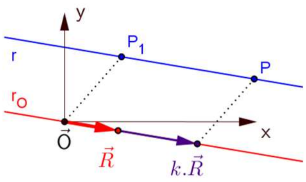
Volgende eigenschappen zijn onmiddellijk duidelijk:

- $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ zijn beide richtingsvectoren van eenzelfde rechte $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : \vec{R}_1 = k.\vec{R}_2$.
- Evenwijdige rechten bepalen dezelfde vectorrechte en hebben dus dezelfde richtingsvectoren.
- Als we twee punten P_1 en P_2 kennen, dan is $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$ een richtingsvector van rechte P_1P_2.

De coördinaat van een richtingsvector $\vec{R}$ van r noemen we een stel *richtingsgetallen* van r. Het is duidelijk dat richtingsgetallen van een rechte slechts op een evenredigheidsfactor na bepaald zijn, net zoals richtingsvectoren. Vertalen we de voorgaande drie eigenschappen in termen van richtingsgetallen, dan krijgen we:

- (a_1, b_1) en (a_2, b_2) zijn twee stellen richtingsgetallen van eenzelfde rechte $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : (a_1, b_1) = k.(a_2, b_2)$, of dus nog $a_1 = k.a_2 \ \wedge \ b_1 = k.b_2$.
- Richtingsgetallen van evenwijdige rechten zijn gelijk op een evenredigheidsfactor na.
- $P_1(x_1, y_1) \in r$ en $P_2(x_2, y_2) \in r$ dan is $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ een stel richtingsgetallen van r.

Vectorvergelijking van een rechte



Beschouw een rechte r waarvan een punt P_1 en een richtingsvector $\vec{R}$ gegeven zijn. De vector $\vec{P_1}$ noemen we een plaatsvector van rechte r. Uit de figuur blijkt dat we elke puntvector $\vec{P}$ van een punt P van de rechte r kunnen schrijven als: $r \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P_1} + k.\vec{R}$, met $k \in \mathbb{R}$.

Dit heet een *vectorvergelijking* van rechte r.

Parametervergelijking van een rechte

Veranderen we in de vectorvergelijking de vectoren door de coördinaten $P_1(x_1, y_1)$, $R(a,b)$ en $P(x,y)$, dan vinden we: $r \leftrightarrow (x,y) = (x_1, y_1) + k.(a,b)$.

Dit wordt meestal geschreven in stelselnotatie: $r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k.a \\ y = y_1 + k.b \end{cases}$.

Dit noemen we een *parametervergelijking* van rechte r. Merk op dat zowel een vectorvergelijking als een parametervergelijking van een rechte niet uniek bepaald zijn maar afhankelijk van de keuze van plaatsvector en richtingsvector.

Cartesische vergelijking van een rechte

Elimineren we parameter k uit het stelsel parametervergelijkingen hierboven dan vinden we vrijwel onmiddellijk dat: $r \leftrightarrow \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}$. Deze formule noemen we een *cartesische vergelijking* van de rechte r. Merk op dat hier moet gelden dat $ab \neq 0$.

Als $a = 0$ dan bekomen we als parametervergelijking $r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + k.b \end{cases}$.

Dan zal r een rechte zijn evenwijdig aan de y-as. De tweede vergelijking in het stelsel is overbodig omdat y alle waarden kan aannemen. We vinden dan ook als cartesische vergelijking $r \leftrightarrow x = x_1$.

Analoog zal als $b = 0$ de rechte evenwijdig zijn met de x-as waarbij dus geldt $r \leftrightarrow y = y_1$.

Uit het voorgaande volgt dat elke uitdrukking van de vorm $ux + vy + w = 0$ een rechte voorstelt in het vlak, op voorwaarde dat u en v niet beide nul zijn.

We kunnen dit herschrijven als $\dfrac{x}{-v} = \dfrac{y + w/v}{u}$, zodat die rechte $(-v, u)$ heeft als stel richtingsgetallen (dit blijft ook gelden als u of v nul is).

Als $v \neq 0$ dan kunnen we de rechte herschrijven als $y = -\dfrac{u}{v} \cdot x - \dfrac{w}{v} = m \cdot x + q$. Hierbij noemen we $m = -u/v$ dan de richtingscoëfficiënt van de rechte en $q = -w/v$ het intercept van de rechte. Merk hierbij op dat deze rechte de y-as zal snijden in het punt $(0, q)$.

Rechte door twee punten

Voorbeeld 1: Bepaal een parametervergelijking en een cartesische vergelijking van de rechte r door de punten $Q(1,2)$ en $R(3,-1)$.

Als richtingsvector nemen we $\vec{Q}-\vec{R}$, dan hebben we als stel richtingsgetallen $(-2,3)$. Als plaatsvector kiezen we voor Q (maar R had evengoed gekund). Dan krijgen we:

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = 1-2k \\ y = 2+3k \end{cases} \Leftrightarrow r \leftrightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3}$$, of nog vereenvoudigd $3x+2y-7=0$.

Algemeen: Bepaal een parametervergelijking en een cartesische vergelijking van de rechte r door de punten $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$. Dan vinden we, met als richtingsvector $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\cdot k \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\cdot k \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} r \leftrightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ of nog } y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+y_1$$

(merk op dat we hier stellen dat $x_1 \neq x_2$ en $y_1 \neq y_2$, anders kan het uiteraard veel eenvoudiger).

Ook $r \leftrightarrow (x-x_1)(y_2-y_1) = (y-y_1)(x_2-x_1)$ is mogelijk, zonder extra voorwaarde.

Rechten in het Euclidische vlak

Richtingscoëfficiënt van een rechte

Stel dat ten opzichte van een Euclidische ijk een rechte r het koppel (a,b) als richtingsgetallen heeft. Als $a \neq 0$ (dus $r \not\parallel y$), dan kunnen we als richtingsgetallen ook $(1, b/a)$ nemen. Per definitie noemen we dan b/a de *richtingscoëfficiënt* (*rico*) van rechte r, die we meestal met m_r zullen noteren.

Enkele gevolgen laten zich dan eenvoudig afleiden:

- Rechten met dezelfde rico zijn evenwijdig.
- Rechten die evenwijdig zijn en niet evenwijdig zijn met de y-as hebben dezelfde rico.
- De rechte $r \leftrightarrow ux+vy+w=0$, met $v \neq 0$, heeft als richtingscoëfficiënt $m_r = -u/v$.
- De rechte door $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$, met $x_1 \neq x_2$, heeft als rico $m_r = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Grafische interpretatie van richtingscoëfficiënt

Stelling: De richtingscoëfficiënt van een rechte is gelijk aan de verticale toename (evenwijdig met de y-as) van de rechte als de horizontale toename (evenwijdig met de x-as) gelijk is aan 1.

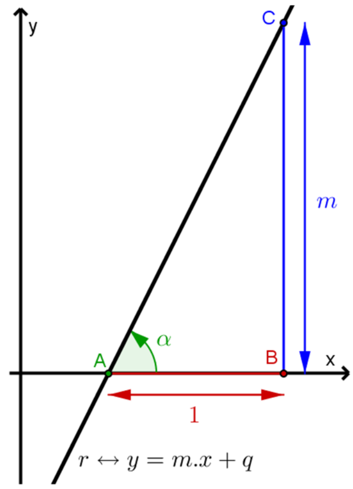
Bewijs: Neem als rechte $r \leftrightarrow y = m\cdot x + q$. Dan geldt voor punten $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ op de rechte dat $y_2 - y_1 = (m\cdot x_1 + q) - (m\cdot x_2 + q) = m(x_2 - x_1)$. Als we zoals gesteld $\Delta x = x_2 - x_1 = 1$ nemen dan vinden we dus inderdaad dat $\Delta y = y_2 - y_1 = m\cdot 1 = m$.

De hellingshoek van een rechte

De *hellingshoek* van een rechte r ($r \not\parallel x$) is de georiënteerde hoek die r maakt met de positieve x-as. Is de rechte evenwijdig met de x-as dan nemen we per definitie als hellingshoek de nulhoek. Per afspraak stellen we $\alpha \in \left]-\pi/2, \pi/2\right]$.

Is $r \,//\, y$ dan is de hellingshoek uiteraard de rechte hoek.

Noem A het snijpunt van de x-as met de rechte $a \leftrightarrow y = mx + q$, ($m > 0$). Construeren we een rechthoekige driehoek ΔABC, met $\left[AB\right]$ op de x-as, B rechts van A, $\left|AB\right| = 1$ en C op de rechte a (zie figuur). Dan volgt uit de vorige stelling dat $\left|BC\right| = m$.



Elementaire goniometrie geeft ons het verband tussen hellingshoek en rico: $\tan\alpha = \left|BC\right| / \left|BA\right| = m$.

In het geval dat $m < 0$, zal ook $\alpha < 0$ en kunnen we ook dan afleiden dat $\tan\alpha = m$.

Loodrechte stand van twee rechten

Stelling: In een Euclidische ijk staan twee rechten r_1 en r_2 met richtingsvectoren $\vec{R}_1\left(a_1, b_1\right)$ en $\vec{R}_2\left(a_2, b_2\right)$ loodrecht op elkaar als en slechts $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Bewijs: $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{R}_1 \perp \vec{R}_2 \Leftrightarrow \vec{R}_1.\vec{R}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. □

Gevolg: Voor twee rechten r_1 en r_2 met *rico's* m_1 en m_2 geldt: $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$.

Bewijs: Dan zijn $\left(1, m_1\right)$ en $\left(1, m_2\right)$ stellen richtingsgetallen van r_1 en r_2 zodat wegens de vorige stelling geldt: $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ □

Hellingshoek – hoek tussen twee rechten

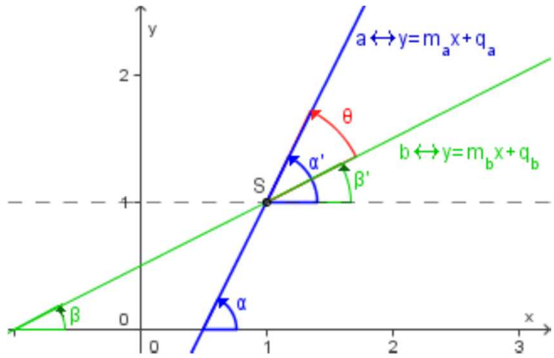
De hoek die twee rechten r_1 en r_2 maken is de (kleinste) hoek die twee van hun richtingsvectoren $\overrightarrow{v_1}$ en $\overrightarrow{v_2}$ maken. We weten dat: $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = \left\|\vec{v}_1\right\|.\left\|\vec{v}_2\right\|.\cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right) = \dfrac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{\left\|\vec{v}_1\right\|.\left\|\vec{v}_2\right\|}$.

Afdwingen dat deze hoek $\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right)$ in het interval $\left[0, \pi/2\right]$ ligt kunnen we door de absolute waarde te nemen van het rechterlid. Op die manier krijgen we dan: $\cos\left(\widehat{r_1, r_2}\right) = \dfrac{\left|\vec{v}_1.\vec{v}_2\right|}{\left\|\vec{v}_1\right\|.\left\|\vec{v}_2\right\|}$.

Als de rechten als rico m_1 en m_2 hebben wordt dit $\cos\left(\widehat{r_1, r_2}\right) = \dfrac{\left|1 + m_1 \cdot m_2\right|}{\sqrt{1 + m_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2}}$

Alternatieve methode om de hoek tussen twee rechten te berekenen

Om de hoek tussen twee rechten te bepalen bekijken we volgende figuur:



Uit de figuur blijkt onmiddellijk dat de hoek tussen de twee rechten gegeven wordt door $\theta = \alpha - \beta$, met α en β de hellingshoeken van de betreffende rechten. Dan geldt:

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta} = \frac{m_a - m_b}{1+m_a.m_b}$$

We kunnen ook hier afdwingen dat de hoek in het interval $[0,\pi/2]$ moet liggen: $\tan\theta = \left|\frac{m_a - m_b}{1+m_a.m_b}\right|$

Uitdaging: toon aan dat beide methodes hetzelfde resultaat geven.

Afstand van een punt tot een rechte

Stelling: De afstand van een punt $P(x_1,y_1)$ tot een rechte $r \leftrightarrow ux+vy+w=0$ wordt gegeven door

$$d(P,r) = \frac{|ux_1+vy_1+w|}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

Bewijs: Noem l de loodlijn uit P op r, dan geldt: $l \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k.u \\ y = y_1 + k.v \end{cases}$.

Er is dus een $k' \in \mathbb{R}$ zodat $P'(x_1+k'.u, y_1+k'.v) \in r$. Voor dit punt geldt:

$$|PP'| = \sqrt{(x_1+k'.u-x_1)^2+(y_1+k'.v-y_1)^2} = |k'|.\sqrt{u^2+v^2}\ .$$

Anderzijds geldt: $P' \in r \Leftrightarrow u(x_1+k'.u)+v(y_1+k'.v)+w=0$

$$\Leftrightarrow ux_1+vy_1+w+k'(u^2+v^2)=0 \Leftrightarrow k' = -\frac{ux_1+vy_1+w}{u^2+v^2}$$

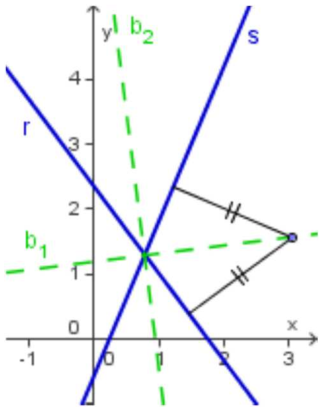
Zodat $d(P,r) = |PP'| = \left|-\frac{ux_1+vy_1+w}{u^2+v^2}\right|.\sqrt{u^2+v^2} = \frac{|ux_1+vy_1+w|}{\sqrt{u^2+v^2}}$ □

Bissectrices

De kenmerkende eigenschap van een bissectrice van twee rechten, is dat de afstanden van een punt op de bissectrice tot beide rechten gelijk zijn. Gebruik makend hiervan kunnen we de vergelijking van de bissectrices opstellen.

Als $r_1 \leftrightarrow u_1x+v_1y+w_1=0$ en $r_2 \leftrightarrow u_2x+v_2y+w_2=0$ dan worden de bissectrices gegeven door de vergelijking: $\frac{|u_1x+v_1y+w_1|}{\sqrt{{u_1}^2+{v_1}^2}}=\frac{|u_2x+v_2y+w_2|}{\sqrt{{u_2}^2+{v_2}^2}}$. Wegwerken van de absolute waarde leidt ertoe dat deze vergelijking uiteenvalt in twee lineaire vergelijkingen (bissectrices die loodrecht op elkaar staan).

Voorbeeld: Bepaal de vergelijkingen van de bissectrices van $r \leftrightarrow 4x+3y-7=0$ en $s \leftrightarrow 12x-5y-3=0$



Oplossing:

$$\begin{aligned}
P(x,y)\in b_{1,2} \quad &\Leftrightarrow d(P,r)=d(P,s)\\
&\Leftrightarrow \frac{|4x+3y-7|}{5}=\frac{|12x-5y-3|}{13}\\
&\Leftrightarrow \frac{4x+3y-7}{5}=\frac{12x-5y-3}{13} \vee \frac{4x+3y-7}{5}=-\frac{12x-5y-3}{13}\\
&\Leftrightarrow 8x-64y+76=0 \vee 112x+14y-106=0
\end{aligned}$$

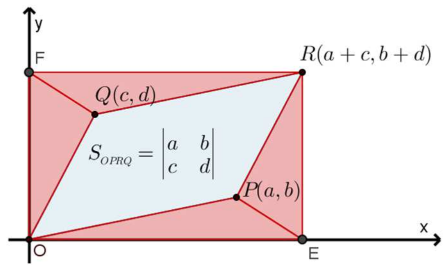
Dus na vereenvoudiging: $b_1 \leftrightarrow y=\frac{1}{8}x+\frac{19}{16}$ en $b_2 \leftrightarrow y=-8x+\frac{53}{7}$ $(b_1 \perp b_2)$.

Oppervlakte van een driehoek

Stelling: In een orthonormaal assenstelsel wordt de oppervlakte van een driehoek $\Delta P_1P_2P_3$, met punten $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ en $P_3(x_3,y_3)$, gegeven door $S_\Delta=\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|$.

Bewijs: Beschouw eerst de punten $P(a,b)$ en $Q(c,d)$. Noem R dat punt waarvoor geldt $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$. We bereken eerst de oppervlakte van het parallellogram $\square OPRQ$.

Noem $E(a+c,0)$ en $F(0,b+d)$ de loodrechte projecties van R op de x- en de y-as. Dan geldt:

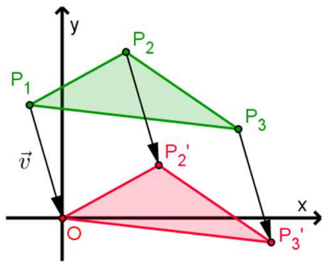


$$\begin{aligned}
&S_{\square OPRQ}\\
&=S_{\square OERF}-S_{\Delta OEP}-S_{\Delta ERP}-S_{\Delta RFQ}-S_{\Delta FOQ}\\
&=(a+c)(b+d)-\frac{(a+c)b}{2}-\frac{(b+d)c}{2}-\frac{(a+c)b}{2}-\frac{(b+d)c}{2}\\
&=ad-bc=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Naargelang de gegeven coördinaten zou het best kunnen dat we hier iets negatiefs uitkomen dus moeten we nog de absolute waarde nemen (de oppervlakte is positief). We besluiten:

$$S_{\square OPRQ}=\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right| \Rightarrow S_{\Delta OPQ}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|$$

Om de oppervlakte van driehoek $\Delta P_1P_2P_3$ te berekenen verschuiven we de driehoek eerst over de vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1O} = -\overrightarrow{P_1}$. De coördinaten van de verschoven punten worden $P_2^{'}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ en $P_3^{'}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, omdat $P_2^{'} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}$ en $P_3^{'} = \overrightarrow{P_3} - \overrightarrow{P_1}$. We vinden dus:



$$S_{\Delta P_1P_2P_3} = S_{\Delta OP_2^{'}P_3^{'}} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Dit is wat we moesten bewijzen, want $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2-R_1}{\underset{R_3-R_1}{=}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$. □

Analytisch bewijzen van meetkundige eigenschappen

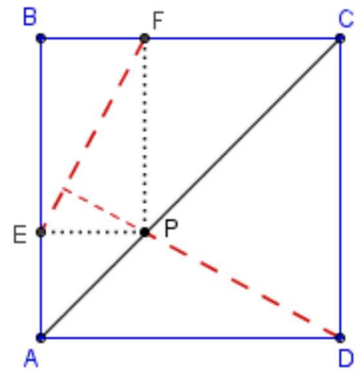
Als we een handig assenstelsel kiezen (zowel de assen zelf als de ijk), dan kunnen sommige eigenschappen uit de meetkunde op een analytische manier bewezen worden. Merk op dat je, van zodra er sprake is van hoeken (of loodrecht stand) of afstanden, een Euclidische ijk moet kiezen. In het andere geval (als er enkel sprake is van evenwijdigheid of middens of...) volstaat een affiene ijk.

Voorbeeld 1: *De punten B en C zijn vast, het punt A is veranderlijk. Noem M het midden van $[AB]$ en N het midden van $[MC]$. Bewijs dat de rechten AN door een vast punt gaan.*

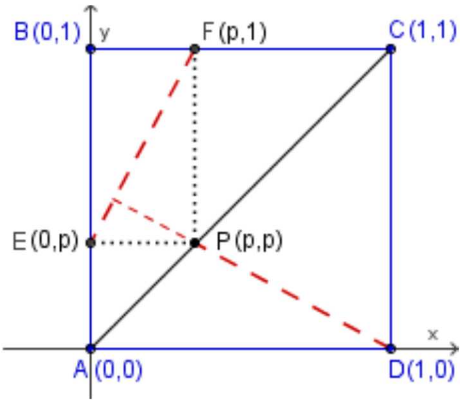
Bewijs: Noem $B(4,0)$ en $C(0,4)$, en neem $A(4x_1, 4y_1)$. Dan zijn $M(2x_1 + 2, 2y_1)$ en $N(x_1 + 1, y_1 + 2)$. Dus geldt $AN \leftrightarrow (x - 4x_1)(2 - 3y_1) = (y - 4y_1)(1 - 3x_1)$.

Met $A(0,0)$ wordt dit $AN \leftrightarrow y = 2x$. Met $A(1,0)$ wordt dit $AN \leftrightarrow 2x - 8 = -2y$. Deze (twee mogelijke) rechten snijden elkaar in het punt $P(4/3, 8/3)$. Dit punt ligt altijd op de rechte AN, want we controleren eenvoudig dat $(4/3 - 4x_1)(2 - 3y_1) = (8/3 - 4y_1)(1 - 3x_1)$, $\forall x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. □

Voorbeeld 2: In een vierkant $\square ABCD$ neemt men een punt P op de diagonaal $[AC]$. Vanuit dit punt laat men de loodlijnen neer op de zijden $[AB]$ en $[BC]$. Noem de voetpunten E en F. Dan geldt $EF \perp PD$.



Bewijs: We kiezen eerst een Euclidisch assenstelsel en een ijk. Als x-as kiezen we AD en als y-as kiezen we AB. Als eenheid kiezen we de zijde van het vierkant. Het punt P ligt op de rechte $y = x$, dus geven we P de coördinaat (p, p). We krijgen dus:



Om nu analytisch aan te tonen dat $EF \perp PD$ berekenen we beide richtingscoëfficiënten:

$$m_{EF} = \frac{1-p}{p} \text{ en } m_{PD} = \frac{-p}{1-p}.$$

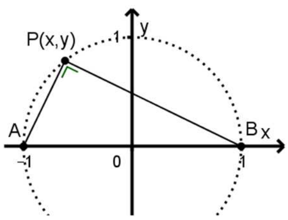
Dus $m_{EF}.m_{PD} = \dfrac{1-p}{p}.\dfrac{-p}{1-p} = -1 \Rightarrow EF \perp PD$.

e) Meetkundige plaatsen

Een meetkundige plaats is een verzameling van punten die voldoen aan een meetkundige eigenschap. Zo is een cirkel bijvoorbeeld de verzameling punten die op een gegeven afstand (*de straal*) van een gegeven punt (*het middelpunt*) liggen.

Voorbeeld: Gegeven zijn twee punten A en B. Bepaal de meetkundige plaats van de punten P zodat $AP \perp PB$.

Oplossing: Noem $A(-1,0)$ en $B(1,0)$ in een Euclidisch geijkt assenstelsel. Dan geldt, met $P(x,y)$, dat:



$$AP \perp PB \overset{*}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-1)+y^2 = 0$$ (*: met $P \neq A$ en $P \neq B$)

Dit vereenvoudigen we tot $x^2 + y^2 = 1$. Dit is een cirkel met middelpunt de oorsprong en straal 1.

We besluiten dus dat de punten op de cirkel met diameter $[AB]$ liggen (zonder A en B zelf).