

3) Homogene coördinaten – het projectieve vlak

a) Homogene coördinaten van een punt

Homogene coördinaten van punten in het affiene vlak

Voor een punt P met cartesische coördinaten (x, y) in het affiene vlak noemen we elk geordend drietal $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ een stel homogene coördinaten van P als geldt $Z \neq 0 \wedge x = \frac{X}{Z} \wedge y = \frac{Y}{Z}$.

Met elk punt komen dus oneindig veel stellen homogene coördinaten overeen, want per definitie bepalen (X, Y, Z) en (tX, tY, tZ) , met $t \in \mathbb{R}_0$, hetzelfde punt.

Omgekeerd komt met elk stel homogene coördinaten (met $Z \neq 0$) precies één punt in het affiene vlak overeen.

Oneigenlijk punt van een rechte

De rechte door $P_1(x_1, y_1)$ met richtingsvector $\vec{R}(a, b)$ heeft als parametervergelijking $\begin{cases} x = x_1 + k.a \\ y = y_1 + k.b \end{cases}$ (met $k \in \mathbb{R}$). Een willekeurig punt P van r heeft dus als homogene coördinaat bijvoorbeeld $P(x_1 + k.a, y_1 + k.b, 1)$, met $k \in \mathbb{R}$.

Nemen we $P \neq P_1$ en dus $k \neq 0$, dan is ook $P\left(\frac{x_1}{k} + a, \frac{y_1}{k} + b, \frac{1}{k}\right)$ een stel homogene coördinaten van een punt op die rechte.

Nemen we hierbij de limiet voor k gaande naar oneindig dan vinden we $\lim_{k \rightarrow +\infty} P = P_\infty(a, b, 0)$. We noemen P_∞ het punt op oneindig van deze rechte (ook soms het oneigenlijk punt van de rechte).

We konden voor $\vec{R}$ ook een andere richtingsvector nemen, maar dan zouden we een coördinaat hebben van de vorm $(t.a, t.b)$, met $t \in \mathbb{R}_0$. Via een analoge redenering hadden we met deze coördinaat het oneigenlijke punt $(ta, tb, 0)$ gevonden. Net als in de vorige paragraaf is ook hier een stel homogene coördinaten slechts op een evenredigheidsfactor na bepaald.

Evenwijdige rechten bepalen dus hetzelfde punt op oneindig.

b) Het projectieve vlak

We voegen bij de verzameling punten van het affiene vlak de oneigenlijke punten van alle rechten toe. Al deze punten hebben een homogene coördinaat van de vorm (X, Y, Z) , zoals ingevoerd in de vorige paragrafen, die op evenredigheid na bepaald is.

Is $Z \neq 0$ dan spreken we van eigenlijke (of affiene) punten, is $Z = 0$ dan spreken we van oneigenlijke punten (punten op oneindig). Al deze punten samen vormen wat we het projectieve vlak noemen.

Merk op dat met de homogene coördinaat $(0, 0, 0)$ geen punt overeenkomt. Dit is niet gedefinieerd.

c) Homogene vergelijking van een rechte

De homogene vergelijking van eigenlijke rechten

We beschouwen de rechte r in het affiene vlak $r \leftrightarrow ux + vy + w = 0$, met $\neg(u = v = 0)$.

Vervangen we de cartesische coördinaten x en y door respectievelijk $\frac{X}{Z}$ en $\frac{Y}{Z}$, met $Z \neq 0$, dan vinden we: $u \frac{X}{Z} + v \frac{Y}{Z} + w = 0$. Na vermenigvuldiging met Z geeft dit: $uX + vY + wZ = 0$.

Een eigenlijk punt ligt dus op r als en slechts als elk stel homogene coördinaten (X, Y, Z) een oplossing is van de vergelijking $uX + vY + wZ = 0$.

Om de oneigenlijke punten te vinden van r stellen we in de vergelijking $Z = 0$. De oplossingen van deze vergelijking zijn dan van de vorm $(-t.v, t.u, 0)$. Als $t \in \mathbb{R}_0$ dan zijn dit de stellen homogene coördinaten van het punt op oneindig P_∞ van de rechte r . Als $t = 0$ dan stelt het geen punt voor.

Om die reden noemen we $uX + vY + wZ = 0$ de homogene vergelijking van de rechte r .

De oneigenlijke rechte

De verzameling oneigenlijke punten laat zich beschrijven door de vergelijking $Z = 0$. We noemen dit dan ook de vergelijking van de *rechte op oneindig*.

De rechten van het projectieve vlak zijn dus alle affiene rechten aangevuld met de rechte op oneindig.

Bij afspraak zullen we vanaf nu ook kleine letters gebruiken voor de homogene coördinaten X, Y en Z . Op voorwaarde dat er geen verwarring kan ontstaan tussen homogene en cartesische coördinaten gebruiken we dus vanaf nu x, y en z .

Met elke waarde van $u, v, w \in \mathbb{R}$, niet alle tegelijk 0, correspondeert dus een projectieve rechte $r \leftrightarrow ux + vy + wz = 0$. Ook hier zijn de parameters u, v, w slechts op evenredigheid na bepaald.

Matrixnotatie

Met elk stel homogene coördinaten, dus met elk projectief punt $P(x, y, z)$ laten we een kolommatrix

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ overeenstemmen. We noemen dit weleens de coördinatenkolom van P .

Analoog noemen we $P^t = [x \quad y \quad z]$ de coördinatenrij van het punt P .

Met elke rechte $r \leftrightarrow ux + vy + wz = 0$ laten we een coëfficiëntenmatrix $U = [u \quad v \quad w]$ corresponderen.

Op die manier krijgen we: $ux + vy + wz = 0 \Leftrightarrow U \cdot P = 0$

We noemen $U \cdot P = 0$ de matrixvorm van de vergelijking van de rechte r .

Homogene vergelijking van andere krommen

De redenering van de vorige paragraaf kunnen we doortrekken naar eender welke kromme (of beter: vergelijking van die kromme).

Zo is bijvoorbeeld $C \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ de cartesische vergelijking van een cirkel. Een homogene vergelijking van dezelfde cirkel zou dan zijn: $C \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xz + 6yz + 9z^2 = 0$. Het komt er dus op aan de vergelijking homogeen te maken in x , y en z (elke term van dezelfde graad te maken) door factoren toe te voegen die machten van z zijn.

d) Dualiteitsprincipe

Het invoeren van het projectieve vlak heeft één heel belangrijk voordeel. De betekenissen van punten en rechten zijn compleet evenwaardig geworden. De puntenverzameling en de rechtenverzameling zijn beiden isomorf met de geordende drietallen die op een veelvoud na bepaald zijn en verschillend zijn van $(0,0,0)$. Op die manier verliezen de begrippen punt en rechte hun intuïtieve inhoud.

Zo gaat door elke twee verschillende punten van het projectieve vlak precies één rechte, en snijden twee verschillende rechten van het projectieve vlak elkaar in precies één punt.

Het dualiteitsprincipe houdt in dat uit elke eigenschap in verband met punten en rechten onmiddellijk een andere stelling kan afgeleid worden door de woorden punt en rechte van plaats te wisselen. We noemen de zo verkregen stelling de duale stelling. Is één van deze stellingen bewezen, dan is automatisch ook de andere bewezen!

e) Collineaire punten – concurrente rechten

Drie punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en $P_3(x_3, y_3, z_3)$ zijn collineair als en slechts als er een rechte $r \leftrightarrow ux + vy + wz = 0$ bestaat zodat $P_1 \in r$, $P_2 \in r$ en $P_3 \in r$. We vinden dan:

$$\exists (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : \begin{cases} ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

De vergelijking van de rechte door $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$, met $P_1 \neq P_2$ is: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$.

De duale stelling zegt: de projectieve rechten $r_1 \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z = 0$, $r_2 \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z = 0$ en

$$r_3 \leftrightarrow u_3x + v_3y + w_3z = 0 \text{ zijn concurrent als en slechts als: } \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

f) Snijpunt van twee rechten – rechte door twee punten

Twee (verschillende) projectieve rechten snijden elkaar altijd in één projectief punt. Ook hier kan onze kennis van determinanten ons helpen om het snijpunt snel te vinden:

Stel dat $r_1 \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z = 0$ en $r_2 \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z = 0$. Als $r_1 \neq r_2$ dan geldt:

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \wedge y = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} \wedge z = \lambda \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Voor elke waarde van $\lambda \in \mathbb{R}_0$ vinden we een stel homogene coördinaten van het snijpunt S .

Eén van de stellen homogene coördinaten van het snijpunt S is $S \left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$.

Duaal: voor de projectieve rechte r door de projectieve punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ geldt

$$r \leftrightarrow ux + vy + wz = 0, \text{ met } u = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, v = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \text{ en } w = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

g) Rechtenbundels en de homogene parametervergelijking van een rechte

Zij gegeven twee (verschillende) rechten $r_1 \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z = 0$ en $r_2 \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z = 0$. Dan is $r \leftrightarrow k \cdot (u_1x + v_1y + w_1z) + m \cdot (u_2x + v_2y + w_2z) = 0$ (met k en m niet beide 0) een rechte die door het snijpunt van r_1 en r_2 gaat. We noemen dit een rechtenbundel door het snijpunt.

Duaal: Zij gegeven twee (verschillende) punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Dan is $k \cdot P_1 + m \cdot P_2$ (met k en m niet beide 0) een punt van de rechte r door P_1 en P_2 .

$$\text{Dit geeft ons de volgende parametervergelijking: } r \leftrightarrow \begin{cases} x = k \cdot x_1 + m \cdot x_2 \\ y = k \cdot y_1 + m \cdot y_2 \\ z = k \cdot z_1 + m \cdot z_2 \end{cases} \quad (k \text{ en } m \text{ niet beide } 0).$$

We noemen dit een parametervergelijking van r in twee homogene parameters. Je kan op deze manier elk punt van de rechte r vinden voor geschikte waarden van k en m (je vindt zelfs elk mogelijk stel homogene coördinaten van elk punt).

Stellen we in de parametervergelijking $k = 1$ en $m = h$ dan wordt de vergelijking:

$$r \setminus P_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + h \cdot x_2 \\ y = y_1 + h \cdot y_2 \\ z = z_1 + h \cdot z_2 \end{cases}$$

Zoals je in de notatie al ziet vind je op die manier niet alle punten van de rechte, maar enkel de punten verschillend van P_2 . Je vindt ook per punt maar één stel homogene coördinaten. We noemen dit de parametervergelijking van de rechte met één niet-homogene parameter h .

Op analoge wijze kan je ook rechtenbundels door een punt beschouwen waarbij je slechts één niet-homogene parameter gebruikt. Hierbij zal dus ook één rechte uit de bundel niet terug te vinden zijn.

h) Punten op oneindig van een kromme

De punten op oneindig van een kromme $\mathcal{K}$ vind je door in de homogene vergelijking van die kromme $z = 0$ te stellen (je zoekt dus eigenlijk de snijpunten van $\mathcal{K}$ met de rechte op oneindig).

Voorbeeld 1: Zoek de punten op oneindig van de hyperbool $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

De homogene vergelijking is $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z^2$. We lossen de vergelijking op met $z = 0$:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \vee \frac{x}{2} = -\frac{y}{3}$$

Stellen we $x = 2$ (homogene coördinaten zijn toch slechts op een evenredigheid na bepaald), dan vinden we dus als oneigenlijke punten de punten $P_1(2, 3, 0)$ en $P_2(2, -3, 0)$. Het is eenvoudig na te rekenen dat dit (uiteraard) ook de oneigenlijke punten zijn van de asymptoten van $\mathcal{H}$.

Voorbeeld 2: Zoek de punten op oneindig van de cirkel $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$.

De homogene vergelijking is $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4xz + 6yz + 12z^2 = 0$. Stellen we hier $z = 0$ dan krijgen we de vergelijking $x^2 + y^2 = 0$, die binnen $\mathbb{R}$ enkel $(0, 0)$ als oplossing heeft, maar dat geeft ons geen homogene coördinaat van een punt.

We besluiten dat de cirkel geen reële oneigenlijke punten heeft.

Maar, als we complexe getallen zouden toelaten als de coördinaten van een punt, dan zijn de punten $P_1(1, i, 0)$ en $P_2(1, -i, 0)$ de oneigenlijke punten van deze cirkel (en ook van elke andere cirkel).

We gaan in het volgende hoofdstuk dieper in op deze imaginaire punten.

4) Iminaire punten en rechten

a) Iminaire punten

Iminaire punten van een kromme

Tot hier toe hebben we geëist dat de coördinaten van punten die voldoen aan een vergelijking altijd reëel moesten zijn. We kunnen dit echter op natuurlijke wijze uitbreiden naar de complexe getallen.

Zo ligt het punt met homogene coördinaat $(5, 3i, 1)$ bijvoorbeeld op de cirkel $C \leftrightarrow x^2 + y^2 = 16z^2$.

Het nut van het bekijken van imaginaire punten (en krommen) is dat er bij bepaalde redeneringen minder 'speciale gevallen' zullen zijn. Zo snijdt een rechte een cirkel ofwel in twee reële punten, ofwel in één reëel punt (twee samenvallende punten), ofwel in geen reëel punt. Beschouwen we ook imaginaire punten dan kan je zeggen dat elke rechte elke cirkel snijdt in twee (al dan niet samenvallende) punten.

Iminaire punten

Een punt is een imaginair punt als er in elk mogelijk stel homogene coördinaten minstens één coördinaat niet zuiver reëel is. Een imaginair punt kunnen we niet aanduiden in ons assenstelsel dat slechts tweedimensionaal is. De homogene coördinaat van een projectief punt is dus slechts op een complexe evenredigheidsfactor na bepaald.

Toegevoegd imaginaire punten

Twee imaginaire punten noemen we toegevoegd imaginair als en slechts als we voor beide punten een stel homogene coördinaten kunnen vinden waarvan de overeenkomstige coördinaten complex toegevoegd zijn.

Zo zijn $P_1(3, 1+i, -i)$ en $P_2(-3i, -1-i, 1)$ toegevoegd imaginaire punten, want een ander stel homogene coördinaten voor P_1 is bijvoorbeeld $(3i, -1+i, 1)$ (de evenredigheidsfactor is i).

b) Iminaire rechten

Iminaire rechten

Ook de coëfficiënten van rechten kunnen we complex beschouwen. Zo is bijvoorbeeld de rechte $a \leftrightarrow 3x + 2iy - z = 0$ een imaginaire rechte.

Een projectieve rechte heet imaginair als elke mogelijke vergelijking van die rechte bestaat uit coëfficiënten waarvan er minstens één niet zuiver reëel is.

Toegevoegd imaginaire rechten

Duaal aan de toegevoegd imaginaire punten kunnen we toegevoegd imaginaire rechten definiëren als rechten waarvoor er homogene vergelijkingen bestaan waarvan de overeenkomstige coëfficiënten complex toegevoegd zijn. De rechte die imaginair toegevoegd is aan de rechte a uit de vorige paragraaf is de rechte $b \leftrightarrow 3x - 2iy - z = 0$.

Enkele stellingen in verband met imaginaire punten en rechten

Stelling ①: Door twee verschillende reële punten gaat één reële rechte.

Stelling ❶: Twee verschillende reële rechten snijden elkaar in één reël punt.

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit de voorgaande hoofdstukken. Denk eraan dat we in het gecompleteerde vlak werken (dus twee evenwijdige rechten snijden elkaar in een oneigenlijk punt).

Stelling ②: Door twee toegevoegd imaginaire punten gaat juist één reële rechte.

Stelling ❷: Twee toegevoegde imaginaire rechten snijden elkaar in een reël punt.

Bewijs: Stel $P_1(x_1 + x_2i, y_1 + y_2i, z_1 + z_2i)$ en $P_2(x_1 - x_2i, y_1 - y_2i, z_1 - z_2i)$ zijn de toegevoegd imaginaire punten, met $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Dan geldt voor de rechte P_1P_2 :

$$P_1P_2 \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 + x_2i & y_1 + y_2i & z_1 + z_2i \\ x_1 - x_2i & y_1 - y_2i & z_1 - z_2i \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 - x_2i & y_1 - y_2i & z_1 - z_2i \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dit is een vergelijking met uitsluitend reële coëfficiënten. De rechte P_1P_2 is dus reël.

Stelling ③: Op een imaginaire rechte ligt juist één reël punt.

Stelling ❸: Door een imaginair punt gaat juist één reële rechte.

Bewijs: Dit punt is het snijpunt van de imaginaire rechte en haar toegevoegde. Mocht er nog een ander reël punt op de rechte liggen dan was het een reële rechte (stelling ①).

c) Reële en imaginaire krommen

We noemen een kromme reël als en slechts als ze oneindig veel reële punten bevat.

We noemen een kromme imaginair als en slechts als ze geen of een eindig aantal reële punten bevat.

De cirkel $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ is een voorbeeld van een imaginaire kromme.

Belangrijke opmerking: we spreken af dat we bij vergelijkingen van krommen die geen rechten zijn enkel reële coëfficiënten zullen toelaten.

d) Isotrope richtingen

Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel noemen we de oneigenlijke punten $P(1, i, 0)$ en $Q(1, -i, 0)$ de isotrope punten. Rechten die door deze punten gaan noemen we isotrope rechten. De richtingen bepaald door deze rechten noemen we de isotrope richtingen.

Voorbeeld: De vergelijking van de imaginaire cirkel $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$ kunnen we ook schrijven als $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (yi)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 0$. We spreken hier van een ontaalde cirkel omdat de cirkel de unie is van twee imaginaire rechten $r_1 \leftrightarrow x + iy = 0$ en $r_2 \leftrightarrow x - iy = 0$. Dit zijn isotrope rechten.

5) Coördinatentransformaties

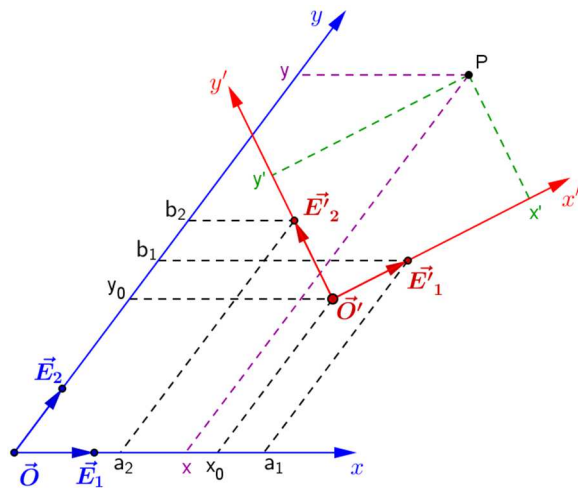
a) Algemene coördinatentransformaties

In cartesische coördinaten

Een assenstelsel is volledig bepaald door een oorsprong en een stel eenheidsvectoren (die geen veelvoud zijn van elkaar). We gaan nu na wat de invloed is op de coördinaten als we het assenstelsel veranderen. Merk op dat we hierbij eerst in cartesische (niet-homogene) coördinaten werken.

Noem het oorspronkelijk assenstelsel $\vec{O}, \vec{E}_1, \vec{E}_2$ (met x -as en y -as) en het nieuwe assenstelsel $\vec{O}', \vec{E}'_1, \vec{E}'_2$ (met x' -as en y' -as).

We gaan ervan uit dat de koppels coördinaten van $\vec{O}', \vec{E}'_1$ en $\vec{E}'_2$ gegeven zijn ten opzichte zijn van het oorspronkelijk assenstelsel, en stellen: $O'(x_0, y_0)$, $E'_1(a_1, b_1)$ en $E'_2(a_2, b_2)$.



Dan geldt per definitie:

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OO'} + x' \cdot \vec{O'E'_1} + y' \cdot \vec{O'E'_2}$$

Met puntvectoren wordt dit:

$$\vec{P} = \vec{O'} + x'(\vec{E'_1} - \vec{O'}) + y'(\vec{E'_2} - \vec{O'})$$

Voor de coördinaten geldt dan:

$$\begin{cases} x = x'(a_1 - x_0) + y'(a_2 - x_0) + x_0 \\ y = x'(b_1 - y_0) + y'(b_2 - y_0) + y_0 \end{cases}$$

In homogene coördinaten

We kunnen hierbij uitgaan van de cartesische coördinaten en eisen dat de derde coördinaat (z) onveranderd blijft (we spreken in dat geval van een affine coördinatentransformatie). We krijgen dan in coördinaten en in matrixnotatie:

$$\begin{cases} x = x'(a_1 - x_0) + y'(a_2 - x_0) + x_0 z' \\ y = x'(b_1 - y_0) + y'(b_2 - y_0) + y_0 z' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & a_2 - x_0 & x_0 \\ b_1 - y_0 & b_2 - y_0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Leftrightarrow P = M \cdot P'$$

We noemen $M = \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & a_2 - x_0 & x_0 \\ b_1 - y_0 & b_2 - y_0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de transformatiematrix. Merk op dat M regulier is, want:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_1 - x_0 & a_2 - x_0 & x_0 \\ b_1 - y_0 & b_2 - y_0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{K_1+K_3}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_0 \\ b_1 & b_2 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{K_2+K_3}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_0 \\ b_1 & b_2 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ omdat } O', E'_1 \text{ en } E'_2 \text{ niet collineair zijn.}$$

We kunnen dus ook besluiten dat $P = M \cdot P' \Leftrightarrow P' = M^{-1} \cdot P$.

De eerste formule is handig als er een nieuwe vergelijking van een kromme moet gevonden worden. De tweede vergelijking is handig als de nieuwe coördinaat van een punt moet gezocht worden.

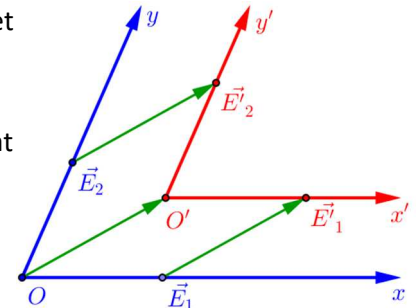
b) Metrische coördinatentransformaties

Verschuiving (translatie) van het assenstelsel:

Een coördinatentransformatie heet een verschuiving (of translatie) met vector $\vec{v}$ als en slechts als $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{E_1 E'_1} = \overrightarrow{E_2 E'_2} = \vec{v}$.

Stellen we, ten opzichte van het oorspronkelijke assenstelsel, dat $O'(x_0, y_0)$, dan geldt uiteraard dat $E'_1(x_0 + 1, y_0)$ en $E'_2(x_0, y_0 + 1)$.

De transformatiematrix is $M_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, met $M_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.



In cartesische coördinaten zijn de transformatieformules ook eenvoudig: $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$.

Voorbeeld 1: Wat wordt de vergelijking van de parabool $\mathcal{P} \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ als we het assenstelsel verschuiven naar de top van deze parabool?

De transformatieformules zijn dan $\begin{cases} x = x' - \frac{b}{2a} \\ y = y' + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{cases}$.

We krijgen dus $\mathcal{P} \Leftrightarrow y' + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a \left(x' - \frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(x' - \frac{b}{2a} \right) + c \Leftrightarrow y' = ax'^2$

Voorbeeld 2: Voer een verschuiving van het assenstelsel uit zodat de termen in x en y uit de vergelijking van $\mathcal{H} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 8x - 3y - 1 = 0$ verdwijnen.

De nieuwe vergelijking wordt $\mathcal{H} \Leftrightarrow (x' + x_0)^2 - (y' + y_0)^2 + 8(x' + x_0) - 3(y' + y_0) - 1 = 0$, of na vereenvoudiging $\mathcal{H} \Leftrightarrow x'^2 - y'^2 + (2x_0 + 8)x' - (2y_0 + 3)y' + x_0^2 - y_0^2 + 8x_0 - 3y_0 - 1 = 0$.

Stellen we hierin dus $x_0 = -4$ en $y_0 = -3/2$, dan wordt dit $\mathcal{H} \Leftrightarrow x'^2 - y'^2 - 95/4 = 0$.

Het punt met (oorspronkelijke) coördinaat $(-4, -3/2)$ is dus het middelpunt van de hyperbool $\mathcal{H}$.

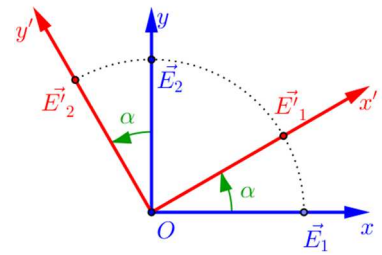
We zullen later bewijzen dat het met behulp van een verschuiving altijd mogelijk is om de termen in x en y uit de vergelijking van een tweedegraadskromme weg te werken (op een speciaal geval na).

Draaiing (rotatie) van het assenstelsel

Een draaiing heeft enkel zin als we hoeken kunnen definiëren dus als we werken in een Euclidisch assenstelsel.

Een coördinatentransformatie heet een draaiing (of rotatie) over een hoek α als en slechts als:

$$O = O', |OE_1| = |OE'_1|, |OE_2| = |OE'_2| \text{ en } \widehat{E_1OE'_1} = \widehat{E_2OE'_2} = \alpha.$$



Met behulp van elementaire goniometrie vind je eenvoudig dat, ten opzichte van het oorspronkelijke assenstelsel: $O'(0,0)$, $E'_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ en $E'_2\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) = E'_2(-\sin \alpha, \cos \alpha)$.

De transformatiematrix is dan $M_{r_\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, met $M_{r_\alpha}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

In cartesische coördinaten zijn de transformatieformules ook eenvoudig: $\begin{cases} x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha \\ y = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha \end{cases}$.

Voorbeeld 3: Wat wordt de vergelijking van $\mathcal{K} \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$ als we het assenstelsel draaien om een hoek van 45° ?

De transformatieformules zijn $\begin{cases} x = x' \cdot \cos 45^\circ - y' \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = x' \cdot \sin 45^\circ + y' \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$. De vergelijking wordt:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 0 \\ &\leftrightarrow \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + x'^2 - y'^2 + \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - \sqrt{2}y' = 0 \\ &\leftrightarrow 2x'^2 - \sqrt{2}y' = 0, \text{ of dus nog: } \mathcal{K} \leftrightarrow y' = \sqrt{2}x'^2 \end{aligned}$$

We zullen later bewijzen dat het met behulp van een draaiing altijd mogelijk is om de term in xy uit de vergelijking van een tweedegraadskromme weg te werken.

Metrische coördinatentransformaties

Coördinatentransformaties waarbij georthonormeerde assenstelsels omgezet worden in andere georthonormeerde assenstelsels noemen we metrische coördinatentransformaties. Het is duidelijk dat translaties en rotaties voorbeelden zijn van metrische coördinatentransformaties. Ook samenstellingen van rotaties en translaties blijven uiteraard metrisch.

Voeren we eerst een rotatie uit met hoek α gevolgd door een translatie met $\vec{v}(x_0, y_0)$, dan wordt de transformatiematrix (en zijn omgekeerde) gegeven door:

$$M = M_t \cdot M_{r_\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ en } M^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & -x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Je rekent eenvoudig na dat geldt $\det M = \det M^{-1} = 1$.

Ook de coördinatentransformatie waarbij x en y van rol wisselen is metrisch (dit is een spiegeling).

Metrische coördinatentransformaties die een samenstelling zijn van enkel translaties en rotaties noemen we direct. Hiervoor geldt dus zoals bewezen $\det M = 1$. De anderen noemen we indirect (daarbij is dus ook eens de rol van x en y verwisseld).

Je kan bewijzen dat elke directe metrische coördinatentransformatie kan gegeven worden door een matrix van de vorm M_{dir} en elke indirecte door een matrix van de vorm M_{ind} , met

$$M_{dir} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } M_{ind} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & x_0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ waarbij } \alpha, x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Voor indirecte metrische coördinatentransformaties geldt dat $\det M = -1$.

c) De nieuwe vergelijking van een rechte

De matrixvergelijking van een homogene rechte $r \leftrightarrow ux + vy + wz = 0$ noteerden we als $U \cdot P = 0$,

$$\text{met } U = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \text{ en } P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Voeren we een coördinatentransformatie uit met transformatiematrix M , dan wordt P omgezet in $M \cdot P'$. De vergelijking van de rechte wordt dan $U \cdot (M \cdot P') = 0 \Leftrightarrow (U \cdot M) \cdot P' = 0 \Leftrightarrow U' \cdot P' = 0$.

Hierbij wordt de nieuwe coëfficiëntenmatrix van r dus gegeven door $U' = U \cdot M$.

6) Kegelsneden

a) Definities en algemene eigenschappen

Algebraïsche en transcendente krommen

Een kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow F(x, y, z) = 0$ heet *algebraïsch van graad n* als en slechts als we haar vergelijking kunnen schrijven als een homogene veelterm van graad n in x, y en z . Een kromme die niet algebraïsch is heet *transcendent*.

Rechten zijn algebraïsche krommen van de eerste graad.

Kegelsneden

Een *kegelsnede* definiëren we dan algemeen als een algebraïsche kromme van de tweede graad.

Een kegelsnede $\mathcal{K}$ heeft dus een homogene vergelijking van de vorm:

$$\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0.$$

In cartesische coördinaten wordt dit (stel $z = 1$): $\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$.

Twee belangrijke opmerkingen:

- De coëfficiënten van de kegelsnede zijn slechts op een evenredigheidsfactor na bepaald.
- Elke kegelsnede bevat oneindig veel punten. Deze kunnen eigenlijk, oneigenlijk, reëel en imaginair zijn.

Ontaarde krommen

We noemen een algebraïsche kromme *ontaard* als haar vergelijking kan ontbonden worden in factoren van lagere graad.

Als geldt dat $\mathcal{K} \leftrightarrow F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{K} \leftrightarrow F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z) = 0$ dan spreekt het voor zich dat

$$P \in \mathcal{K} \Leftrightarrow P \in \mathcal{K}_1 \vee P \in \mathcal{K}_2, \text{ met } \mathcal{K}_1 \leftrightarrow F_1(x, y, z) = 0 \text{ en } \mathcal{K}_2 \leftrightarrow F_2(x, y, z) = 0.$$

We zeggen dat $\mathcal{K}$ ontaard is in $\mathcal{K}_1$ en $\mathcal{K}_2$ en noemen $\mathcal{K}_1$ en $\mathcal{K}_2$ de *componenten* van $\mathcal{K}$.

Affiene kegelsneden

We noemen een kegelsnede *affien* als en slechts als de oneigenlijke rechte geen component ervan is.

$\mathcal{K}$ is niet-affien als $\mathcal{K}_1 \leftrightarrow z = 0$ een component is van $\mathcal{K}$, dus als $a = a' = b'' = 0$. In dat geval zou dan $\mathcal{K} \leftrightarrow a''z^2 + 2byz + 2b'xz = 0 \Leftrightarrow z(a''z + 2by + 2b'x) = 0$.

Partiële afgeleiden

De partiële afgeleide $F'_x(x, y, z)$ van een functie $F(x, y, z)$ naar x vind je door in het voorschrift van de functie y en z als constanten te beschouwen en af te leiden naar x . Analoog definieer je de andere partiële afgeleiden $F'_y(x, y, z)$ en $F'_z(x, y, z)$.

Voor een kegelsnede $\mathcal{K}$ met $F(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$ wordt dit:

- $F'_x(x, y, z) = 2ax + 2b'z + 2b''y = 2(ax + b''y + b'z)$
- $F'_y(x, y, z) = 2a'y + 2bz + 2b''x = 2(b''x + a'y + bz)$
- $F'_z(x, y, z) = 2a''z + 2by + 2b'x = 2(b'x + by + a''z)$

Matrix van een kegelsnede

Met elke kegelsnede $\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0$ laten we nu een matrix C corresponderen, met op de rijen de coëfficiënten van de (vereenvoudigde) partiële afgeleiden:

$$C = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}.$$

Deze definitie aanvaarden we ook voor kegelsneden in cartesische coördinaten.

De matrixvorm van de vergelijking van een kegelsnede

Het is eenvoudig na te rekenen dat $P(x, y, z) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow P^t \cdot C \cdot P = 0$, want:

$$\begin{aligned} P^t \cdot C \cdot P &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ax + b''y + b'z \\ b''x + a'y + bz \\ b'x + by + a''z \end{bmatrix} \\ &= ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy \end{aligned}$$

We noemen $P^t \cdot C \cdot P = 0$ de matrixvorm van de vergelijking van een kegelsnede.

Enkele eigenschappen van de vergelijking van een kegelsnede

Zij gegeven twee punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en de kegelsnede $\mathcal{K} \leftrightarrow F(x, y, z) = 0$, met $F(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$. De volgende eigenschappen laten zich heel eenvoudig (maar met een beetje rekenwerk) bewijzen:

Verwisseling der indices

$\begin{aligned} &x_1 \cdot F'_x(x_2, y_2, z_2) + y_1 \cdot F'_y(x_2, y_2, z_2) + z_1 \cdot F'_z(x_2, y_2, z_2) \\ &\quad \\ &x_2 \cdot F'_x(x_1, y_1, z_1) + y_2 \cdot F'_y(x_1, y_1, z_1) + z_2 \cdot F'_z(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$	<u>In matrixvorm:</u> $P_1^t \cdot C \cdot P_2 = P_2^t \cdot C \cdot P_1$
---	--

We tonen eerst aan dat de matrixvorm wel degelijk klopt door te bewijzen dat:

$$x_1 \cdot F'_x(x_2, y_2, z_2) + y_1 \cdot F'_y(x_2, y_2, z_2) + z_1 \cdot F'_z(x_2, y_2, z_2) = 2 \cdot P_1^t \cdot C \cdot P_2, \text{ en anderzijds analoog}$$

$$x_2 \cdot F'_x(x_1, y_1, z_1) + y_2 \cdot F'_y(x_1, y_1, z_1) + z_2 \cdot F'_z(x_1, y_1, z_1) = 2 \cdot P_2^t \cdot C \cdot P_1. \text{ We berekenen eenvoudig:}$$

$$\begin{aligned}
LL &= x_1 \cdot F'_x(x_2, y_2, z_2) + y_1 \cdot F'_y(x_2, y_2, z_2) + z_1 \cdot F'_z(x_2, y_2, z_2) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F'_x(x_2, y_2, z_2) \\ F'_y(x_2, y_2, z_2) \\ F'_z(x_2, y_2, z_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F'_x(x_2, y_2, z_2) \\ F'_y(x_2, y_2, z_2) \\ F'_z(x_2, y_2, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2ax_2 + 2b''y_2 + 2b'z_2 \\ 2b''x_2 + 2a'y_2 + 2bz_2 \\ 2b'x_2 + 2by_2 + 2a''z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = 2 \cdot P_1^t \cdot C \cdot P_2
\end{aligned}$$

Merk nu op dat $P_1^t \cdot C \cdot P_2$ een 1×1 -matrix is en dus gelijk aan zijn getransponeerde, zodat:

$$P_1^t \cdot C \cdot P_2 = (P_1^t \cdot C \cdot P_2)^t = P_2^t \cdot C^t \cdot P_1 = P_2^t \cdot C \cdot P_1 \quad (C \text{ is een symmetrische matrix dus } C = C^t). \quad \square$$

De formule van Euler

$$x_1 \cdot F'_x(x_1, y_1, z_1) + y_1 \cdot F'_y(x_1, y_1, z_1) + z_1 \cdot F'_z(x_1, y_1, z_1) = 2 \cdot F(x_1, y_1, z_1)$$

Bewijs: Uit het eerste deel van het vorige bewijs volgt (met $P_1 = P_2$) onmiddellijk dat:

$$x_1 \cdot F'_x(x_1, y_1, z_1) + y_1 \cdot F'_y(x_1, y_1, z_1) + z_1 \cdot F'_z(x_1, y_1, z_1) = 2 \cdot P_1^t \cdot C \cdot P_1 = 2 \cdot F(x_1, y_1, z_1) \quad \square$$

De formule van Taylor

$$\begin{aligned}
&F(kx_1 + mx_2, ky_1 + my_2, kz_1 + mz_2) \\
&\quad || \\
&k^2 F(x_1, y_1, z_1) + km(x_1 \cdot F'_x(x_2, y_2, z_2) + y_1 \cdot F'_y(x_2, y_2, z_2) + z_1 \cdot F'_z(x_2, y_2, z_2)) + m^2 F(x_2, y_2, z_2)
\end{aligned}$$

$$\text{In matrixvorm: } (kP_1 + mP_2)^t \cdot C \cdot (kP_1 + mP_2) = k^2 P_1^t \cdot C \cdot P_1 + 2km P_1^t \cdot C \cdot P_2 + m^2 P_2^t \cdot C \cdot P_2.$$

Bewijs: Dat de matrixvorm equivalent is met de eerste uitspraak volgt uit het voorgaande. Er geldt:

$$\begin{aligned}
(kP_1 + mP_2)^t \cdot C \cdot (kP_1 + mP_2) &= (kP_1^t + mP_2^t) \cdot C \cdot (kP_1 + mP_2) \\
&= k^2 P_1^t \cdot C \cdot P_1 + km P_1^t \cdot C \cdot P_2 + mk P_2^t \cdot C \cdot P_1 + m^2 P_2^t \cdot C \cdot P_2 \\
&= k^2 P_1^t \cdot C \cdot P_1 + 2km P_1^t \cdot C \cdot P_2 + m^2 P_2^t \cdot C \cdot P_2 \quad (\text{verwisseling der indices}) \quad \square
\end{aligned}$$

De kenmerkende getallen van een kegelsnede

$$\text{Zij } \mathcal{K} \text{ een kegelsnede met matrix } C = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}.$$

We definiëren de kubische discriminant van $\mathcal{K}$ als $\Delta = \det C = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$.

De kwadratische discriminant van $\mathcal{K}$ definiëren we als $\delta = \begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix}$.

Verder definiëren we ook nog het getal η (èta) $\eta = a + a'$.

b) De invarianten van een kegelsnede

De vergelijking van een kegelsnede na een coördinatentransformatie

De matrixvergelijking van een kegelsnede noteerden we als $P^t \cdot C \cdot P = 0$.

Voeren we een coördinatentransformatie uit met transformatiematrix M , dan wordt P omgezet in $M \cdot P'$. De vergelijking van de kegelsnede wordt dan:

$$(M \cdot P')^t \cdot C \cdot (M \cdot P') = 0 \Leftrightarrow P'^t \cdot M^t \cdot C \cdot M \cdot P' = 0 \Leftrightarrow P'^t \cdot (M^t \cdot C \cdot M) \cdot P' = 0.$$

Ten opzichte van het nieuwe assenstelsel heeft de kegelsnede dus als matrix $C_1 = M^t \cdot C \cdot M$.

Per afspraak noteren we van $\mathcal{K}$ de matrix, de coëfficiënten en de kenmerkende getallen met onderindex 1 in plaats van met een accent '. Dit om verwarring bij de coëfficiënten te voorkomen.

Gevolgen voor de kenmerkende getallen van een kegelsnede

Stelling: Voor de kubische discriminant Δ van een kegelsnede $\mathcal{K}$ met matrix C geldt na het uitvoeren van een coördinatentransformatie met matrix M dat $\Delta_1 = \Delta \cdot (\det M)^2$.

Bewijs: $\Delta_1 = \det C_1 = \det (M^t \cdot C \cdot M) = \det M^t \cdot \det C \cdot \det M = \det M \cdot \Delta \cdot \det M = \Delta \cdot (\det M)^2$ $\square$

Gevol: Na het uitvoeren van een metrische coördinatentransformatie geldt dat $\Delta_1 = \Delta$.

De coëfficiënten van een kegelsnede zijn slechts op een evenredigheidsfactor k na uniek bepaald. Als je alle coëfficiënten met een factor $k \in \mathbb{R}_0$ vermenigvuldigt dan wordt de kubische discriminant vermenigvuldigd met k^3 . Het al dan niet nul zijn van Δ wordt hier ook niet door beïnvloed. We noemen het al dan niet nul zijn van Δ een projectieve invariant.

Stelling: Voor de kwadratische discriminant δ van een kegelsnede $\mathcal{K}$ met matrix C geldt na het uitvoeren van een affiene coördinatentransformatie met matrix M dat $\delta_1 = \delta \cdot (\det M)^2$.

Bewijs: Voor affiene coördinatentransformaties geldt dat $M = \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & a_2 - x_0 & x_0 \\ b_1 - y_0 & b_2 - y_0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Er geldt dus:

$$C_1 = M^t \cdot C \cdot M = \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & b_1 - y_0 & 0 \\ a_2 - x_0 & b_2 - y_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & a_2 - x_0 & x_0 \\ b_1 - y_0 & b_2 - y_0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De nullen in deze vermenigvuldiging zorgen ervoor dat de elementen a_1, b_1'' en a_1' van C_1 enkel beïnvloed worden door de elementen die zowel in de eerste twee kolommen als rijen van C en M staan. Zo krijgen we dus voor die elementen:

$$C_1 = M^t \cdot C \cdot M \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1'' \\ b_1'' & a_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & b_1 - y_0 \\ a_2 - x_0 & b_2 - y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 - x_0 & a_2 - x_0 \\ b_1 - y_0 & b_2 - y_0 \end{bmatrix}.$$

Van beide leden de determinant nemen geeft: $\delta_1 = \det M^t \cdot \delta \cdot \det M \Leftrightarrow \delta_1 = \delta \cdot (\det M)^2$. $\square$

Gevolg: Na het uitvoeren van een metrische coördinatentransformatie geldt dat $\delta_1 = \delta$.

De coëfficiënten van een kegelsnede zijn slechts op een evenredigheidsfactor k na uniek bepaald. Als je alle coëfficiënten met een factor $k \in \mathbb{R}_0$ vermenigvuldigt dan wordt de kwadratische discriminant vermenigvuldigd met k^2 . Het teken van δ wordt hier ook niet door beïnvloed. We noemen het teken van δ een affiene invariant.

Stelling: Voor het kenmerkend getal η van een kegelsnede $\mathcal{K}$ met matrix C geldt na het uitvoeren van een metrische coördinatentransformatie met matrix M dat $\eta_1 = \eta$.

Bewijs: Hier is het bewijs voor directe metrische coördinatentransformaties. Indirect verloopt analoog.

Per definitie weten we dat $\eta_1 = a_1 + a_1'$. Uit het vorige bewijs weten we dat:

$$C_1 = M^t \cdot C \cdot M \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1'' \\ b_1'' & a_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \text{ Uitwerken geeft:}$$

- $a_1 = (a \cos \alpha + b'' \sin \alpha) \cos \alpha + (b'' \cos \alpha + a' \sin \alpha) \sin \alpha$
 $= a \cos^2 \alpha + 2b'' \sin \alpha \cos \alpha + a' \sin^2 \alpha$
- $a_1' = (-a \sin \alpha + b'' \cos \alpha)(-\sin \alpha) + (-b'' \sin \alpha + a' \cos \alpha) \cos \alpha$
 $= a \sin^2 \alpha - 2b'' \sin \alpha \cos \alpha + a' \cos^2 \alpha$

Hieruit volgt direct dat $\eta_1 = a_1 + a_1' = a(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + a'(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a + a' = \eta$. $\square$

De coëfficiënten van een kegelsnede zijn slechts op een evenredigheidsfactor k na uniek bepaald. Als je alle coëfficiënten met een factor $k \in \mathbb{R}_0$ vermenigvuldigt dan wordt ook η er mee vermenigvuldigd. Het al dan niet nul zijn van η wordt hier niet door beïnvloed. We noemen het al dan niet nul zijn van η een metrische invariant.

c) Ontaarde kegelsneden

Een kegelsnede is een algebraïsche kromme van de tweede graad. Een ontaarde kegelsnede is dus per definitie de unie van twee algebraïsche krommen van de eerste graad: rechten.

Een rechtenpaar door de oorsprong

We beschouwen twee verschillende rechten die door de oorsprong gaan. Stel $r_1 \leftrightarrow u_1 x + v_1 y = 0$ (met u_2 en v_2 niet beide nul) en $r_2 \leftrightarrow u_2 x + v_2 y = 0$ (met u_2 en v_2 niet beide nul).

Dan geldt dus $\mathcal{K} = r_1 \cup r_2 \Leftrightarrow (u_1x + v_1y)(u_2x + v_2y) = 0$ of nog $\mathcal{K} \Leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0$, waarbij $a = u_1u_2$, $2b'' = u_1v_2 + u_2v_1$ en $a' = v_1v_2$. Hierbij zijn dus ook a, a' en b'' niet allen nul.

Omgekeerd kunnen we een vergelijking van de vorm $\mathcal{K} \Leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0$ altijd schrijven in de vorm $\mathcal{K} \Leftrightarrow (u_1x + v_1y)(u_2x + v_2y) = 0$ door te ontbinden in factoren (eventueel imaginair).

De richtingscoëfficiënten van het rechtenpaar

We bepalen de rico's van het rechtenpaar $r_1 \cup r_2$ aan de hand van deze eenvoudige redenering:

m is de richtingscoëfficiënt is van een van de componenten van $\mathcal{K}$

$$\Leftrightarrow m \text{ is de rico van } r_1 \text{ of } m \text{ is de rico van } r_2 \Leftrightarrow R(1, m) \in r_1 \vee R(1, m) \in r_2$$

$$\Leftrightarrow (1, m) \text{ is een oplossing van } u_1x + v_1y = 0 \text{ of van } u_2x + v_2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (1, m) \text{ is een oplossing van } (u_1x + v_1y)(u_2x + v_2y) = 0 \text{ en dus ook van } ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 2b''m + a'm^2 = 0.$$

Als $a' = b'' = 0$ dan zullen beide componenten samenvallen met de y -as.

Als $a' = 0$ en $b'' \neq 0$ dan is dit een eerstegraadsvergelijking met één reële oplossing voor m . De andere component zal dan samenvallen met de y -as.

Als $a' \neq 0$ is dit een vierkantsvergelijking met twee (al dan niet verschillende) oplossingen voor m (in $\mathbb{C}$) en met als discriminant $(2b'')^2 - 4aa' = -4(aa' - b''^2) = -4\delta$. We kunnen dan besluiten:

$$\star \delta < 0 \Leftrightarrow m_1, m_2 \in \mathbb{R} \text{ en } m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow r_1 \text{ en } r_2 \text{ zijn twee verschillende reële rechten.}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{K} \text{ heeft twee verschillende reële punten op oneindig.}$$

$$\star \delta = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow r_1 \text{ en } r_2 \text{ zijn samenvallende reële rechten.}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{K} \text{ heeft twee samenvallende reële punten op oneindig.}$$

$$\star \delta > 0 \Leftrightarrow m_1 \text{ en } m_2 \text{ zijn complex toegevoegd} \Leftrightarrow r_1 \text{ en } r_2 \text{ zijn toegevoegd imaginaire rechten.}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{K} \text{ heeft twee toegevoegd imaginaire punten op oneindig.}$$

Merk op dat deze conclusies ook blijven gelden als $a' = 0$ (rekening houdend met het voorgaande).

Stelling: in een orthonormaal assenstelsel zullen de componenten r_1 en r_2 van de ontaarde kegelsnede $\mathcal{K} \Leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0$ loodrecht op elkaar staan als en slechts als $\eta = 0$.

$$\text{Bewijs: in het geval } a' \neq 0: m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = -1 \Leftrightarrow a = -a' \Leftrightarrow a + a' = 0 \Leftrightarrow \eta = 0.$$

In het geval dat $a' = 0$ valt één van de rechten r_1 of r_2 samen met de y -as. Dan zal $r_1 \perp r_2$ als en slechts als de andere rechte samenvalt met de x -as. Dus in dat geval moet $\mathcal{K} \Leftrightarrow xy = 0$. Maar dan is $a = a' = 0$ en dus $\eta = a + a'$. $\square$

Dubbelpunten

Een *dubbelpunt* van een ontaarde kegelsnede is elk gemeenschappelijk punt van de componenten.

Vermits een ontaarde kegelsnede bestaat uit twee rechten heeft een ontaarde kegelsnede ofwel één dubbelpunt (als de componenten verschillend zijn) ofwel oneindig veel (als de componenten samenvallen).

Stelling: $D(x_0, y_0, z_0)$ is een dubbelpunt van $\mathcal{K} \leftrightarrow F(x, y, z) = 0$

$\Downarrow$

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = F'_y(x_0, y_0, z_0) = F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Bewijs: “ $\Downarrow$ ” De kegelsnede is ontaard dus stel $F(x, y, z) = (u_1x + v_1y + w_1z)(u_2x + v_2y + w_2z)$.

Dan geldt voor de partiële afgeleide $F'_x(x, y, z) = u_1(u_2x + v_2y + w_2z) + u_2(u_1x + v_1y + w_1z)$.

Per definitie ligt D op beide componenten, dus krijgen we:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = u_1(u_2x_0 + v_2y_0 + w_2z_0) + u_2(u_1x_0 + v_1y_0 + w_1z_0) = u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 0 = 0$$

Volledig analoog leiden we af dat ook $F'_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ en $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$.

“ $\Uparrow$ ”: Als $F'_x(x_0, y_0, z_0) = F'_y(x_0, y_0, z_0) = F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ dan geldt wegens de stelling van Euler:

$$F(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}(x_0 \cdot F'_x(x_0, y_0, z_0) + y_0 \cdot F'_y(x_0, y_0, z_0) + z_0 \cdot F'_z(x_0, y_0, z_0)) = 0 \Leftrightarrow D(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{K}$$

Neem nu een willekeurig ander punt van $\mathcal{K}$, noem dit punt $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Een willekeurig punt P van de rechte DP_1 wordt gegeven door: $P(kx_0 + mx_1, ky_0 + my_1, kz_0 + mz_1)$, met $k, m \in \mathbb{R}$ (niet beide nul). De formule van Taylor leert ons dan dat ook voor dit punt P geldt:

$$\begin{aligned} & F(kx_0 + mx_1, ky_0 + my_1, kz_0 + mz_1) \\ &= k^2 F(x_0, y_0, z_0) + km(x_1 \cdot F'_x(x_0, y_0, z_0) + y_1 \cdot F'_y(x_0, y_0, z_0) + z_1 \cdot F'_z(x_0, y_0, z_0)) + m^2 F(x_1, y_1, z_1) \\ &= k^2 \cdot 0 + km(x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0) + m^2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow P \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

Alle punten van DP_1 liggen dus op $\mathcal{K}$. Met andere woorden: DP_1 is een component van $\mathcal{K}$.

Bestaat er nog een punt $P_2 \in \mathcal{K} \setminus DP_1$ dan kunnen we analoog aantonen dat ook DP_2 een component moet zijn van $\mathcal{K}$. In dat geval is D het gemeenschappelijk punt van beide componenten DP_1 en DP_2 en dus het enige dubbelpunt van $\mathcal{K}$.

In het andere geval moet $\mathcal{K}$ bestaan uit twee samenvallende componenten DP_1 . Dan is elk punt van DP_1 (en dus ook D zelf) een dubbelpunt $\square$

De hoofdstelling van ontaarde kegelsneden

Voor een kegelsnede $\mathcal{K} \leftrightarrow F(x, y, z) = 0$ geldt: $\mathcal{K}$ is ontaard $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

Bewijs: $\mathcal{K}$ is ontaard $\Leftrightarrow \mathcal{K}$ heeft een dubbelpunt $D(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow F'_x(x_0, y_0, z_0) = F'_y(x_0, y_0, z_0) = F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(ax_0 + b''y_0 + b'z_0) = 0 \\ 2(b''x_0 + a'y_0 + bz_0) = 0 \\ 2(b'x_0 + by_0 + a''z_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b''y + b'z = 0 \\ b''x + a'y + bz = 0 \\ b'x + by + a''z = 0 \end{cases} \text{ heeft } (x_0, y_0, z_0) \text{ als oplossing} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = 0 \text{ (want } (x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)) \quad \square \end{aligned}$$

Classificatie van de ontaarde kegelsneden

Beschouw de kegelsnede $\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0$.

We zoeken van deze kegelsnede de punten op oneindig. Daartoe lossen we het stelsel op:

$$\begin{cases} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$\mathcal{K}$ heeft dus dezelfde punten op oneindig als $\mathcal{R} \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0$. Dit is een rechtenpaar door de oorsprong (wat we eerder al uitvoerig bespraken).

Geval 1: $\delta < 0$

In dat geval heeft $\mathcal{R}$ en dus ook $\mathcal{K}$ twee verschillende reële punten op oneindig. De componenten van $\mathcal{K}$ zijn dus twee niet-evenwijdige rechten die elkaar snijden in het dubbelpunt van $\mathcal{K}$. Om dit dubbelpunt te vinden kunnen we affien werken (stel $z = 1$) en lossen we het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, 1) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + b''y_0 + b' = 0 \\ b''x_0 + a'y_0 + b = 0 \end{cases}. \text{ Dit is een stelsel van Kramer want } \delta = \begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dit stelsel heeft een unieke reële oplossing: Dit geeft het reële eigenlijke dubbelpunt $D(x_0, y_0, 1)$.

De componenten zijn dus twee verschillende niet-evenwijdige reële rechten.

Geval 2: $\delta > 0$

In dat geval heeft $\mathcal{R}$ en dus ook $\mathcal{K}$ twee toegevoegd imaginaire punten op oneindig. De componenten zijn dus twee niet-evenwijdige rechten die elkaar snijden in het dubbelpunt van $\mathcal{K}$. Dit dubbelpunt kunnen we op dezelfde manier vinden als in geval 1. Het is dus ook eigenlijk en reëel.

De componenten zijn dus twee niet-evenwijdige toegevoegd imaginaire rechten.

Geval 3a: $\delta = 0$ en $a = a' = b'' = 0$

In dit geval is $\mathcal{K}$ zoals eerder al gezien een niet-affiene kegelsnede en is de oneigenlijke rechte een component.

Geval 3b: $\delta = 0$ en a, a' en b'' zijn niet allen 0

In dat geval heeft $\mathcal{R}$ en dus ook $\mathcal{K}$ twee samenvallende reële punten op oneindig. De componenten van $\mathcal{K}$ zijn dus twee evenwijdige rechten die elkaar snijden in een reëel oneigenlijk dubbelpunt (of samenvallen – in dat geval zijn alle punten van de kegelsnede dubbelpunten).

d) Classificatie van de kegelsneden

Ook niet-ontaarde kegelsneden $\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b'yz + 2b'xz + 2b''xy = 0$ zullen dezelfde punten op oneindig hebben als het rechtenpaar door de oorsprong $\mathcal{R} \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0$ (zoals we aantoonen bij ontaarde kegelsneden).

We berekenen de punten op oneindig van de gekende kegelsneden in hun standaardvorm:

- De parabool $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$: hierbij is $\delta = 0 \cdot 1 - 0^2 = 0$.
 $\mathcal{P}$ heeft dus twee samenvallende punten op oneindig.
- De ellips $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: hierbij is $\delta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} - 0^2 > 0$.
 $\mathcal{E}$ heeft dus twee toegevoegd imaginaire punten op oneindig.
- De hyperbool $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: hierbij is $\delta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{-1}{b^2} - 0^2 < 0$.
 $\mathcal{H}$ heeft dus twee verschillende reële punten op oneindig.

Om die reden definiëren we het volgende (dit geldt zowel voor ontaarde als niet-ontaarde kegelsneden) voor affiene kegelsneden:

$\delta > 0 \Leftrightarrow \mathcal{K}$ is elliptisch, $\delta < 0 \Leftrightarrow \mathcal{K}$ is hyperbolisch, $\delta = 0 \Leftrightarrow \mathcal{K}$ is parabolisch.

Via transformaties een kegelsnede in zijn standaardvorm brengen

We gaan er hier van uit dat de kegelsnede $\mathcal{K}$ niet-ontaard en dus affien is. Ontaarde kegelsneden werden reeds behandeld. We gaan er bovendien van uit dat we in een georthonormeed assenstelsel werken. Omdat $\mathcal{K}$ affien is kunnen we in cartesische coördinaten werken ($z = 1$). We stellen dus:

$$\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$$

Stelling 1: Als $\delta \neq 0$ dan kunnen we met een translatie van het assenstelsel de eerstegraadstermen uit de vergelijking van een kegelsnede wegwerken.

Bewijs: Na een translatie van het assenstelsel met transformatieformules $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ krijgen we:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\leftrightarrow a(x' + x_0)^2 + 2b''(x' + x_0)(y' + y_0) + a'(y' + y_0)^2 + 2b'(x' + x_0) + 2b(y' + y_0) + a'' = 0 \\ &\leftrightarrow ax'^2 + 2b''x'y' + a'y'^2 + 2(ax_0 + b''y_0 + b')x' + 2(b''x_0 + a'y_0 + b)y' \\ &\quad + ax_0^2 + 2b''x_0y_0 + a'y_0^2 + 2b'x_0 + 2by_0 + a'' = 0 \end{aligned}$$

Neem dus (x_0, y_0) als oplossing van $\begin{cases} ax + b''y + b' = 0 \\ b''x + a'y + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x, y, 1) = 0 \\ F'_y(x, y, 1) = 0 \end{cases}$.

Dit stelsel heeft altijd een oplossing want het is een stelsel van Cramer (omdat $\delta \neq 0$).

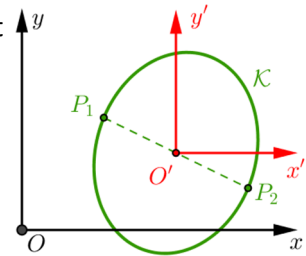
De constante in de nieuwe vergelijking is $ax_0^2 + 2b''x_0y_0 + a'y_0^2 + 2b'x_0 + 2by_0 + a'' = F(x_0, y_0, 1)$ zodat voor de vergelijking van $\mathcal{K}$ ten opzichte van het nieuwe assenstelsel geldt:

$\mathcal{K} \Leftrightarrow ax'^2 + 2b''x'y' + a'y'^2 + F(x_0, y_0, 1) = 0$, wat we moesten bewijzen $\square$

Meetkundige betekenis van deze translatie

Dit punt $O'(x_0, y_0)$ is een symmetriemiddelpunt van de kegelsnede. Want ten opzichte van het nieuwe assenstelsel $O'x'y'$ geldt:

$$\begin{aligned} P_1(x'_1, y'_1) \in \mathcal{K} &\Leftrightarrow ax_1'^2 + 2b''x_1'y_1' + a'y_1'^2 + F(x_0, y_0, 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(-x'_1)^2 + 2b''(-x'_1)(-y'_1) + a'(-y'_1)^2 + F(x_0, y_0, 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow P_2(-x'_1, -y'_1) \in \mathcal{K} \end{aligned}$$



Het is dan ook logisch dat deze methode niet lukt als $\delta = 0$ want dan is $\mathcal{K}$ parabolisch en een parabool heeft geen symmetriemiddelpunt.

Voorbeeld: Beschouw $\mathcal{K} \Leftrightarrow 9x^2 - 4xy + 6y^2 - 32x - 4y + 24 = 0$. We zoeken het punt $O'(x_0, y_0)$:

$$\begin{cases} ax + b''y + b' = 0 \\ b''x + a'y + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 2y - 16 = 0 \\ -2x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow O'(2, 1) \text{ is het symmetriemiddelpunt.}$$

Verder is $F(2, 1, 1) = 9 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 32 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 24 = -10$, zodat ten opzichte van het nieuwe assenstelsel $O'x'y'$ zal gelden dat $\mathcal{K} \Leftrightarrow 9x'^2 - 4x'y' + 6y'^2 - 10 = 0$.

Stelling 2: Met een rotatie van het assenstelsel kunnen we de term in $x'y'$ uit de vergelijking van een kegelsnede wegwerken.

Bewijs: Na een rotatie van het assenstelsel met transformatieformules: $\begin{cases} x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha \\ y = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha \end{cases}$ is

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\Leftrightarrow a(x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha)^2 + 2b''(x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha)(x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha) \\ &\quad + a'(x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha)^2 + 2b'(x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha) + 2b(x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha) + a'' = 0 \end{aligned}$$

De term in $x'y'$ wordt in deze nieuwe vergelijking gegeven door:

$$\begin{aligned} 2b_1'' &= -2a \cos \alpha \sin \alpha + 2b'' \cos^2 \alpha - 2b'' \sin^2 \alpha + 2a' \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2b''(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2 \sin \alpha \cos \alpha (a - a') = 2b'' \cos 2\alpha - (a - a') \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Geval 1: $a = a'$. Kies dan α zodat $\cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Dan zal $b_1'' = 0$.

Geval 2: $a \neq a'$. Kies dan α zodat $2b'' \cos 2\alpha - (a - a') \sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \tan 2\alpha = \frac{2b''}{a - a'}$, of dus nog $2\alpha = \text{Bgtan} \frac{2b''}{a - a'} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \text{Bgtan} \frac{2b''}{a - a'} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Ook dan zal $b_1'' = 0$. $\square$

Opmerkingen:

- In beide gevallen vinden we telkens vier mogelijke draaihoeken voor α (de draaihoek is slechts op een veelvoud van $\pi/2$ bepaald).
- Er geldt $\tan 2\alpha = \frac{2b''}{a - a'} \Leftrightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2b''}{a - a'} \Leftrightarrow b'' \tan^2 \alpha + (a - a') \tan \alpha - b'' = 0$. Deze vorm geeft ook de juiste oplossingen als $a - a' = 0$ en is dus altijd bruikbaar. De oplossingen van deze vergelijkingen (voor $\tan \alpha$) kan je ook interpreteren als de richtingscoëfficiënten van de nieuwe assen.

Voorbeeld: We gaan verder met $\mathcal{K} \leftrightarrow 9x'^2 - 4x'y' + 6y'^2 - 10 = 0$. Voor de rotatiehoek vinden we:

$$b'' \tan^2 \alpha + (a - a') \tan \alpha - b'' = 0 \Leftrightarrow -2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2 \vee \tan \alpha = -1/2.$$

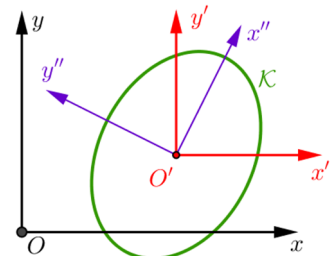
Kiezen we $\tan \alpha = 2$ en neem $\begin{cases} \sin \alpha = 2/\sqrt{5} \\ \cos \alpha = 1/\sqrt{5} \end{cases}$. De transformatieformules worden: $\begin{cases} x' = \frac{x'' - 2y''}{\sqrt{5}} \\ y' = \frac{2x'' + y''}{\sqrt{5}} \end{cases}$.

$$\text{Zo wordt: } \mathcal{K} \leftrightarrow 9 \left(\frac{x'' - 2y''}{\sqrt{5}} \right)^2 - 4 \left(\frac{x'' - 2y''}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{2x'' + y''}{\sqrt{5}} \right) + 6 \left(\frac{2x'' + y''}{\sqrt{5}} \right)^2 - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x''^2 + 10y''^2 = 10 \text{ of na vereenvoudiging } \frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1.$$

Het is zo duidelijk dat $\mathcal{K}$ een ellips is.

De coördinatentransformaties uit de vorige voorbeelden zijn samengebracht op de figuur hiernaast.



De meetkundige betekenis van de rotatie

Het nieuwe assenstelsel zal altijd zo liggen dat minstens één van de nieuwe assen evenwijdig is met een symmetrieas van de kegelsnede.

Classificatie van de affiene kegelsneden

Het eerste geval: $\delta \neq 0$

Uit de vorige twee stellingen volgt dan dat we een translatie en een rotatie kunnen uitvoeren zodat de vergelijking van $\mathcal{K}$ kan geschreven worden als $F(x, y, 1) = ax^2 + a'y^2 + a'' = 0$, met kwadratische discriminant $\delta = aa' \neq 0$ en kubische discriminant $\Delta = aa'a''$. We kunnen dit herschrijven als:

$$\mathcal{K} \leftrightarrow a^2 x^2 + aa' y^2 + aa'' = 0 \Leftrightarrow a^2 x^2 + aa' y^2 = -\frac{a^2 a' a''}{aa'} \Leftrightarrow a^2 x^2 + \delta y^2 = -\frac{a\Delta}{\delta}.$$

★ Stel dat $\delta > 0$ ($\mathcal{K}$ is elliptisch)

- Als $a\Delta < 0$ dan wordt $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$.

We spreken in dit geval van een niet-ontaarde reële ellips.

- Als $a\Delta > 0$ dan wordt $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = -1$, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$.

We spreken in dit geval van een niet-ontaarde imaginaire ellips.

- Als $\Delta = 0$ dan wordt $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}i\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}i\right) = 0$, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$.

We spreken in dit geval van een ontaarde ellips.

★ Stel dat $\delta < 0$ ($\mathcal{K}$ is hyperbolisch)

- Als $\Delta \neq 0$ dan wordt $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ of $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$.

We spreken in dit geval van een niet-ontaarde reële hyperbool.

- Als $\Delta = 0$ dan wordt $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) = 0$ met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$.

We spreken in dit geval van een ontaarde hyperbool.

Het tweede geval: $\delta = 0$ ($\mathcal{K}$ is parabolisch)

Stelling 1 kunnen we niet toepassen maar stelling 2 wel. Door een rotatie uit te voeren kan de vergelijking van $\mathcal{K}$ dus geschreven worden als $F(x, y, 1) = ax^2 + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$.

Omdat $\mathcal{K}$ affien is en $\delta = a \cdot a' = 0$ moet ofwel $a = 0$ ofwel $a' = 0$. Stel bijvoorbeeld $a = 0, a' \neq 0$.

De vergelijking wordt dan $\mathcal{K} \leftrightarrow a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$, met $\Delta = -a'b'^2$.

★ Stel dat $b' \neq 0$, en dus ook dat $\Delta \neq 0$

Na een translatie van het assenstelsel naar $O'(x_0, y_0)$ wordt de vergelijking:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\leftrightarrow a'(y' + y_0)^2 + 2b'(x' + x_0) + 2b(y' + y_0) + a'' = 0 \\ &\leftrightarrow a'y'^2 + 2b'x' + 2(a'y_0 + b)y' + \underbrace{a'y_0^2 + 2b'x_0 + 2by_0 + a''}_{=F(x_0, y_0, 1)} = 0 \end{aligned}$$

Noem (x_0, y_0) de unieke oplossing van $\begin{cases} a'y_0 + b = 0 \\ a'y_0^2 + 2b'x_0 + 2by_0 + a'' = 0 \end{cases}$.

Dit stelsel heeft altijd een unieke oplossing omdat $a' \neq 0$ en $b' \neq 0$.

De vergelijking wordt dan $\mathcal{K} \leftrightarrow a'y'^2 + 2b'x' = 0$.

Deze kan je schrijven als $\mathcal{K} \leftrightarrow y'^2 = 2px$ of $\mathcal{K} \leftrightarrow y'^2 = -2px$, met $p \in \mathbb{R}_0^+$.

We spreken in dit geval van een niet-ontaarde parabool.

★ Stel dat $b' = 0$, en dus ook dat $\Delta = 0$

De vergelijking wordt dan $\mathcal{K} \leftrightarrow a'y^2 + 2by + a'' = 0$.

We spreken in dit geval van een ontaarde parabool.

De cirkel herbekeken

De algemene vergelijking van een cirkel is $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2k_1x + 2k_2y + k_3 = 0$. Dit is een vergelijking van het type $F(x, y, 1) = 0$, met $a = a' \neq 0$ en $b'' = 0$. Verder geldt $\delta = 1 \cdot 1 - 0 = 1 > 0$. De cirkel is dus zoals we eerder al inzagen een speciale ellips.

De orthogonale hyperbool herbekeken

We bewezen al aan dat het rechtenpaar door de oorsprong $\mathcal{R} \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0$ dezelfde punten op oneindig heeft als de kegelsnede $\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0$. We toonden ook aan dat de richtingen van de rechten loodrecht op elkaar staan als en slechts als $\eta = a + a' = 0$. Het al dan niet nul zijn van η is een metrische invariant. Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel zal $\mathcal{K}$ dus een orthogonale hyperbool zijn als en slechts als $\eta = 0$.

Samenvattend

Bij de classificatie van de kegelsneden hierboven steunden we enkel op het al dan niet nul zijn van Δ , het teken van $a\Delta$ en het teken van δ . We toonden reeds vroeger aan dat dit allemaal affine invarianten zijn. De classificatie kan dus ook gebeuren met de standaardvergelijking van een kegelsnede.

Zij dus $\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0$, met a , a' en b'' niet allen nul. Dan vinden we samenvattend de classificatie van affine kegelsneden:

- ★ $\delta > 0$: de kegelsnede is een ellips (als bovendien $a = a'$ en $b'' = 0$ is het een cirkel)
 - $a\Delta > 0$: een niet-ontaarde imaginaire ellips
 - $a\Delta < 0$: een niet-ontaarde reële ellips
 - $\Delta = 0$: een ontaarde ellips (twee toegevoegd imaginaire rechten)
- ★ $\delta < 0$: de kegelsnede is een hyperbool (als bovendien $\eta = a + a' = 0$ dan is hij orthogonaal)
 - $\Delta \neq 0$: een niet-ontaarde hyperbool
 - $\Delta = 0$: een ontaarde hyperbool (twee niet-evenwijdige reële rechten)
- ★ $\delta = 0$: de kegelsnede is een parabool
 - $\Delta \neq 0$: een niet-ontaarde parabool
 - $\Delta = 0$: een ontaarde parabool (twee evenwijdige rechten)

Voorbeeld: Gegeven is de kegelsnede $\mathcal{K} \leftrightarrow 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 22x - 54y + 169 = 0$.

$\delta = 12^2 - 9 \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{K}$ is een parabool. We voeren een rotatie uit van het assenstelsel.

$$b'' \tan^2 \alpha + (a - a') \tan \alpha - b'' = 0 \Leftrightarrow -12 \tan^2 \alpha - 7 \tan \alpha + 12 = 0 \stackrel{D=625}{\Leftrightarrow} \tan \alpha = \frac{3}{4} \vee \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

Kiezen we $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ en nemen we $\begin{cases} \sin \alpha = 3/5 \\ \cos \alpha = 4/5 \end{cases}$. De transformatieformules zijn: $\begin{cases} x = \frac{4x' - 3y'}{5} \\ y = \frac{3x' + 4y'}{5} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\leftrightarrow 9\left(\frac{4x' - 3y'}{5}\right)^2 - 24\left(\frac{4x' - 3y'}{5}\right)\left(\frac{3x' + 4y'}{5}\right) + 16\left(\frac{3x' + 4y'}{5}\right)^2 - 22\left(\frac{4x' - 3y'}{5}\right) - 54\left(\frac{3x' + 4y'}{5}\right) + 169 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{K} \leftrightarrow 25y'^2 - 50x' - 30y' + 169 = 0 \end{aligned}$$

We verschuiven dan het assenstelsel naar $O'(x_0, y_0)$, met formules $\begin{cases} x'' = x' + x_0 \\ y'' = y' + y_0 \end{cases}$, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\leftrightarrow 25(y'' + y_0)^2 - 50(x'' + x_0) - 30(y'' + y_0) + 169 = 0 \\ &\Leftrightarrow 25y''^2 + (50y_0 - 30)y'' - 50x'' + (25y_0^2 - 50x_0 - 30y_0 + 169) = 0 \end{aligned}$$

Met $\begin{cases} 50y_0 - 30 = 0 \\ 25y_0^2 - 50x_0 - 30y_0 + 169 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 16/5 \\ y_0 = 3/5 \end{cases}$ vinden we de top $T(16/5, 3/5)$ (t.o.v. $Ox'y'$).

De vergelijking wordt dan $\mathcal{K} \leftrightarrow 25y''^2 - 50x'' = 0 \Leftrightarrow y''^2 = 2x''$. Inderdaad een parabool.

