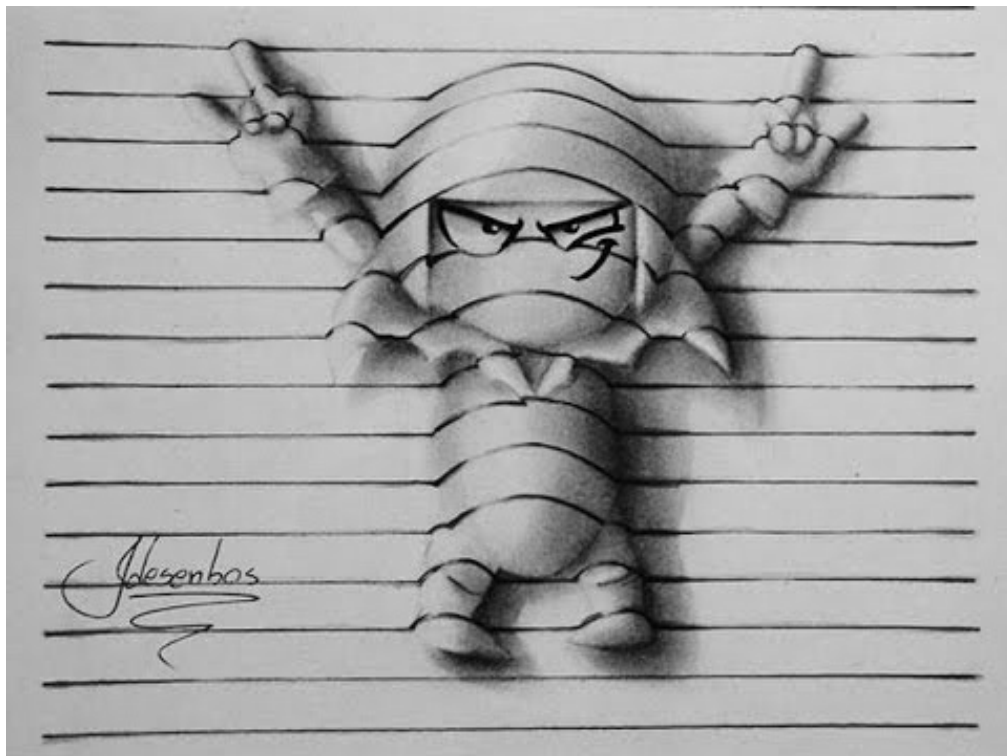
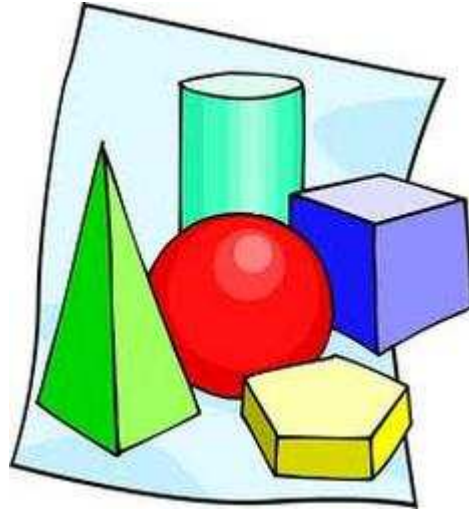


Ruimte meetkunde



(<http://www.boredpanda.com/3d-lines-notepad-drawings-15-years-old-joao-carvalho/>)

1) Herhaling

a) Grondbegrippen en notaties

In de ruimtemeetkunde zijn de bouwstenen punten, rechten en vlakken. Punten duiden we aan met hoofdletters ($A, B, \dots$), rechten met kleine letters ($a, b, \dots$) en vlakken met Griekse letters ($\alpha, \beta, \dots$).

Een punt A ligt op een rechte a noteren we $A \in a$ (letterlijk: A is een element van a).

Een punt ligt in een vlak α noteren we $A \in \alpha$ (letterlijk: A is een element van α).

Een rechte a ligt in een vlak α noteren we $a \subset \alpha$ (letterlijk: a is een deelverzameling van α).

Punten die tot eenzelfde rechte behoren noemen we *collineair*. Punten (en rechten) die tot eenzelfde vlak behoren noemen we *coplanair*. Rechten die door eenzelfde punt gaan heten *concurrent*.

Wat betreft het voorstellen van ruimtelijke situaties spreken we het volgende af:

- Evenwijdige rechten worden ook op de tekening evenwijdig getekend.
- Gelijke lijnstukken die evenwijdig zijn, worden als gelijke lijnstukken getekend.
- Onzichtbare lijnen worden in streeplijn getekend.

b) Bepalen van een vlak

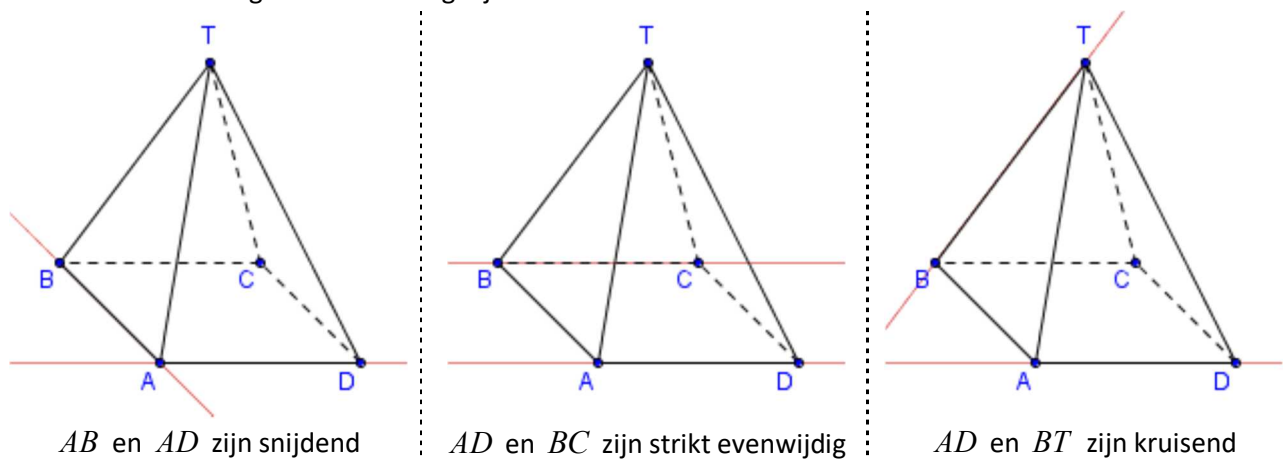
Een vlak kunnen we eenduidig bepalen op vier verschillende manieren:

- Drie niet-collineaire punten
- Een rechte en een punt niet op die rechte gelegen
- Twee snijdende rechten
- Twee strikt evenwijdige rechten

Een vlak bepaald door (bvb.) de evenwijdige rechten a en b noteren we met $vl(a, b)$.

c) Onderlinge ligging van twee rechten

In de vlakke meetkunde (en bij uitbreiding dus ook in de ruimte) kennen we reeds 3 mogelijke onderlinge liggingen van twee rechten. Rechten kunnen in een vlak samenvallend, snijdend of strikt evenwijdig zijn. In de ruimte is er echter nog een vierde mogelijk: *kruisend*.

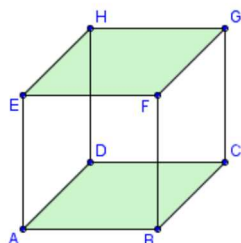


Twee rechten zijn dus kruisend als ze noch snijdend, noch evenwijdig zijn. Ze liggen dus nooit in hetzelfde vlak.

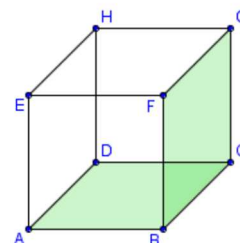
d) Onderlinge ligging van twee vlakken

Voor de onderlinge ligging van twee vlakken α en β zijn er drie mogelijkheden:

- Ze zijn samenvallend: $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$.
- Ze zijn strikt evenwijdig: $\alpha \cap \beta = \emptyset$.
- Ze zijn snijdend: $\alpha \cap \beta = s$, met s de snijlijn van beide vlakken.



Ondervlak en bovenvlak zijn strikt evenwijdig
 $vl(ABC) \parallel vl(EFG), vl(ABC) \cap vl(EFG) = \emptyset$

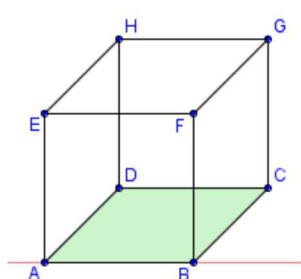


Ondervlak en zijvlak zijn snijdend
 $vl(ABC) \cap vl(BCG) = BC$

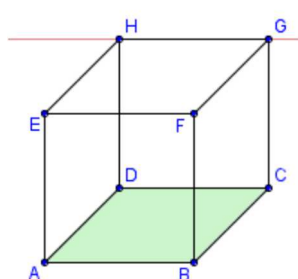
e) Onderlinge ligging van een rechte en een vlak

Ook voor de onderlinge ligging van een vlak α en een rechte a zijn er drie mogelijkheden:

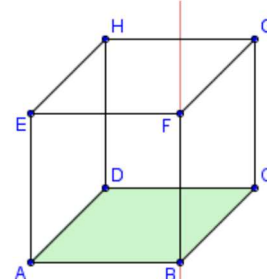
- De rechte ligt in het vlak: $a \cap \alpha = a$ (wordt ook genoteerd met $a \subset \alpha$).
- De rechte is strikt evenwijdig aan het vlak: $a \cap \alpha = \emptyset$.
- De rechte snijdt het vlak: $a \cap \alpha = \{S\}$.



AB ligt in $vl(ABC)$:
 $AB \subset vl(ABC)$



GH en $vl(ABC)$ zijn strikt
 evenwijdig: $GH \cap vl(ABC) = \emptyset$



BF snijdt $vl(ABC)$:
 $BF \cap vl(ABC) = \{B\}$

f) Evenwijdigheid bij vlakken en rechten

Stelling ①:	Twee verschillende vlakken die een punt gemeen hebben, snijden elkaar en hun snijlijn gaat door dat punt.
Stelling ②:	Als een vlak één van twee evenwijdige rechten snijdt, dan snijdt het ook de andere rechte.
Stelling ③:	Een rechte is evenwijdig met een vlak als ze evenwijdig is met een rechte van dat vlak.
Stelling ④:	Trek je aan een rechte evenwijdig met een vlak, een evenwijdige door een punt van dat vlak, dan ligt die evenwijdige in dat vlak.
Stelling ⑤:	Twee rechten die evenwijdig zijn aan een derde rechte, zijn ook onderling evenwijdig.
Stelling ⑥:	Als een rechte evenwijdig is met twee snijdende vlakken dan is ze dat ook met hun snijlijn.
Stelling ⑦:	Als men door een rechte evenwijdig aan een vlak een ander vlak aanbrengt dat het oorspronkelijke vlak snijdt, dan is de snijlijn evenwijdig met de oorspronkelijke rechte.

Stelling ⑧:	Als twee snijdende rechten van een vlak evenwijdig zijn met een ander vlak, dan zijn ook deze vlakken evenwijdig.
Gevolgen:	• Twee vlakken zijn evenwijdig als en slechts als twee snijdende rechten van het ene vlak evenwijdig zijn met twee snijdende rechten van het andere vlak. • Door een punt buiten een vlak gelegen bestaat er juist één vlak evenwijdig ermee. • Alle rechten door een punt evenwijdig met een vlak liggen in één (evenwijdig) vlak.
Stelling ⑨:	De snijlijnen van twee strikt evenwijdige vlakken met een derde vlak zijn onderling evenwijdig.

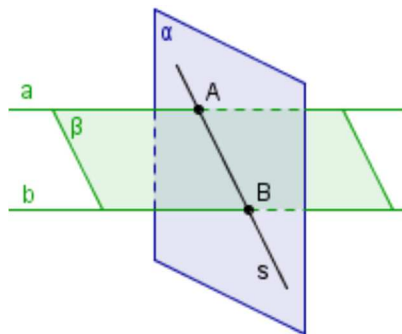
Bij wijze van voorbeeld bewijzen we hier stellingen ②, ⑤ en ⑨.

② *Geg.:* twee rechten $a \parallel b$ en een vlak α zodat $a \cap \alpha = \{A\}$.

T.B.: $b \not\parallel \alpha$

Bewijs: Evenwijdigheid houdt twee mogelijkheden in (samenvallend en strikt evenwijdig):

- 1) Als a en b samenvallend zouden zijn is het gestelde evident.
- 2) Als a en b strikt evenwijdig zijn bepalen ze een vlak $\beta = vl(a, b)$.



Aangezien $A \in \alpha \cap \beta$ snijden de vlakken α en β elkaar in een rechte s (stelling ①).

Noem B het snijpunt van s en b (dit bestaat want a en b liggen in een vlak en a snijdt s), dan ligt B dus ook in α ($B \in s \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha$).

B is het enige snijpunt van b met α want mocht er nog één zijn, dan zou het al zeker niet op s kunnen liggen, en dan zouden α en β drie niet-collineaire punten gemeenschappelijk hebben, en dus samenvallen (wat niet kan want a snijdt α). $\square$

⑤ *Geg.:* drie rechten a, b, c zodat $a \parallel b \wedge b \parallel c$

T.B.: $a \parallel c$

Bewijs: We stellen dat a, b, c verschillende rechten zijn. We overlopen de liggingen voor a en c :

- 1) a snijdt c in een punt S : dan zouden er in het vlak $vl(b, S)$ twee verschillende rechten bestaan door S die evenwijdig zijn met b , wat uiteraard niet kan. $\nearrow$
- 2) a kruist c : neem een willekeurig punt $A \in a$, en beschouw het vlak $\gamma = vl(c, A)$.

Vermits a en c kruisend zijn liggen ze niet in hetzelfde vlak, dus snijdt de rechte a het vlak γ (in het punt A). We gebruiken nu tweemaal stelling ②:

Da snijdt γ en $a \parallel b \Rightarrow b$ snijdt ook γ . b snijdt γ en $b \parallel c \Rightarrow c$ snijdt ook γ .

Dat laatste is uiteraard onmogelijk want $c \subset \gamma$. $\nearrow$

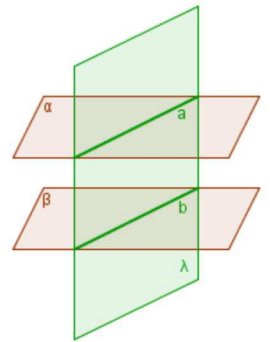
- 3) De enige resterende mogelijkheid is dat $a \parallel c$. $\square$

⑨ Geg.: drie vlakken α, β, λ zodat $\alpha // \beta$ (en $\alpha \cap \beta = \emptyset$), $\alpha \cap \lambda = a$ en $\beta \cap \lambda = b$

T.B.: $a // b$

Bewijs: a en b liggen in λ en zijn dus ofwel snijdend, ofwel evenwijdig:

- 1) a snijdt b in een punt S : dan ligt S zowel in α als in β want $S \in a \subset \alpha$ en $S \in b \subset \beta$. Maar dit kan niet want $\alpha \cap \beta = \emptyset$. ✗
- 2) $a // b$ is de resterende mogelijkheid. $\square$



g) Loodrechte stand in de ruimte

Def.: De hoek tussen twee kruisende rechten is de hoek die je bekomt door één van de rechten te verschuiven tot ze de ander snijdt: $\widehat{ab} = \widehat{a'b}$ met $a' // a$ en $a' \cap b = \{S\}$.

Def.: Een rechte staat loodrecht op een vlak als en slechts als ze loodrecht staat op elke rechte ervan.

Def.: Twee vlakken staan loodrecht op elkaar als en slechts als het ene een loodlijn op het andere omvat.

Stelling ①:	Een rechte staat loodrecht op een vlak als en slechts als ze loodrecht staat op twee snijdende rechten van dat vlak.
Stelling ②:	Er bestaat juist één loodlijn uit een punt op een vlak.
Stelling ③:	Er bestaat juist één loodvlak uit een punt op een rechte.
Stelling ④:	Loodlijnen op eenzelfde vlak zijn evenwijdig.
Stelling ⑤:	Loodvlakken op eenzelfde rechte zijn evenwijdig.
Stelling ⑥:	Als één van twee evenwijdige rechten loodrecht staat op een vlak, dan ook de andere.
Stelling ⑦:	Als één van twee evenwijdige vlakken loodrecht staat op een rechte, dan ook het andere.
Stelling ⑧:	Een vlak dat loodrecht staat op een ander vlak, staat ook loodrecht op elk vlak dat daarmee evenwijdig is.
Stelling ⑨:	De snijlijn van twee vlakken die loodrecht staan op een derde vlak, staat ook loodrecht op dat vlak.
Stelling ⑩:	Twee vlakken die loodrecht staan op twee rechten die loodrecht op elkaar staan, zijn ook onderling loodrecht. Twee rechten die loodrecht staan op twee vlakken die loodrecht op elkaar staan, zijn ook onderling loodrecht.

Bij wijze van voorbeeld bewijzen we hier stelling ⑤.

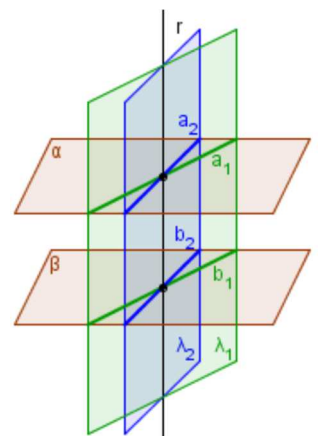
Geg.: twee vlakken α en β en een rechte r zodat $r \perp \alpha \wedge r \perp \beta$

T.B.: $\alpha // \beta$

Bewijs: Beschouw twee verschillende vlakken λ_1 en λ_2 die r omvatten.

- λ_1 snijdt α in een rechte a_1 en β in een rechte b_1 . Omdat α en β beide loodvlakken op r zijn geldt $a_1 \perp r \wedge b_1 \perp r \Rightarrow a_1 // b_1$.
- λ_2 snijdt α in een rechte a_2 en β in een rechte b_2 . Omdat α en β beide loodvlakken op r zijn geldt $a_2 \perp r \wedge b_2 \perp r \Rightarrow a_2 // b_2$.

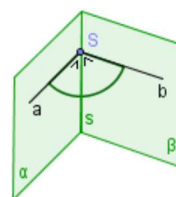
Twee snijdende rechten van α zijn dus evenwijdig met twee snijdende rechten van $\beta \Rightarrow \alpha$ en β zijn evenwijdig (stelling ⑧). $\square$



h) Afstanden en hoeken in de ruimte

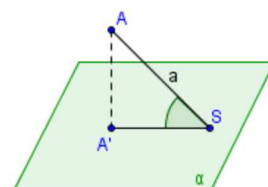
Hoek van twee vlakken

Def.: De hoek die twee vlakken met elkaar maken is de hoek gevormd door twee loodlijnen op de snijlijn, die in de vlakken liggen.



Hoek van een rechte en een vlak

Def.: De hoek die een rechte met een vlak maakt (de rechte mag niet in het vlak liggen, noch er loodrecht op staan) is de hoek die de rechte insluit met haar loodrechte projectie op dat vlak.



i) Oppervlakte en inhoud van ruimtefiguren

De volgende formules kennen we al enkele jaren:

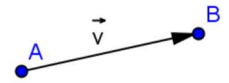
Ruimtefiguur	Figuur	Oppervlakte	Volume
Kubus		$A = 6z^2$	$V = z^3$
Balk		$A = 2 \cdot (ld + dh + hl)$	$V = lhd$
Prisma		$A = \text{som der zijvlakken}$	$V = A_G \cdot h$
Piramide		$A = \text{som der zijvlakken}$	$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$
Kegel		$A = \pi r^2 + \pi r a$ (met $a = \sqrt{r^2 + h^2}$)	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Cilinder		$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$	$V = \pi r^2 h$
Bol		$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

2) Vectoren & coördinaten

a) Definities en notaties

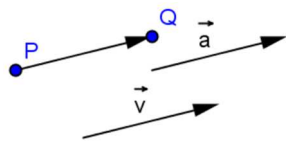
Een *vector* is een wiskundige grootte die een grootte, een richting en een zin heeft.

In het vlak kunnen we vectoren voorstellen als een pijl tussen twee punten. We noteren een vector bepaald door *beginpunt* A en *eindpunt* B meestal als $\overrightarrow{AB}$, of onafhankelijk van deze punten als $\vec{v}$.



De grootte van een vector $\overrightarrow{AB}$ noteren we als $\|\overrightarrow{AB}\|$, dit is de lengte van het lijnstuk $|AB|$.

De vector met lengte 0 noemen we de nulvector en noteren we met $\vec{0}$.

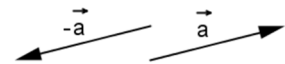


Bij de grafische voorstelling van een vector moet ook het beginpunt of *aangrijpingspunt* gekend zijn. Mag dit punt vrij gekozen worden, dan spreken we over *vrije vectoren* en in het andere geval van *gebonden vectoren*. Een vrije vector kan je beschouwen als een vector die je vrij kan verschuiven. Twee vectoren zijn gelijk als ze dezelfde grootte, richting en zin hebben. Zo geldt op de figuur hiernaast $\overrightarrow{PQ} = \vec{a} = \vec{v}$. Het zijn allemaal *representanten* van dezelfde vector.

b) Bewerkingen met vectoren

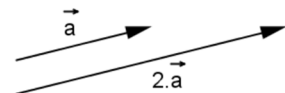
Tegengestelde van een vector

De *tegengestelde* van een vector is de vector met dezelfde grootte en richting maar tegengestelde zin. We noteren de tegengestelde vector van $\vec{a}$ uiteraard als $-\vec{a}$.



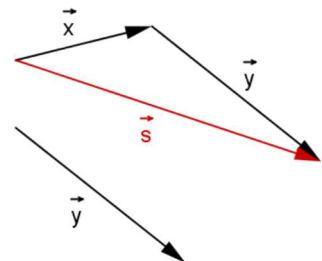
Scalair product van een vector met een reëel getal

Vermenigvuldigen we een vector met een positief getal dan blijven richting en zin dezelfde maar vermenigvuldigen we de grootte van de vector met dat getal. Bij vermenigvuldiging met een negatief getal draai je de zin om (dus neem je de tegengestelde vector).

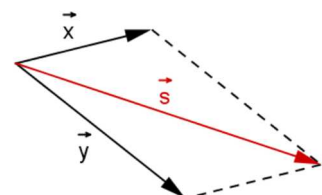


Som van twee vectoren

Om de *som* van twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ te bekomen moet je het beginpunt van $\vec{y}$ naar het eindpunt van $\vec{x}$ te verplaatsen. De som is dan de vector met als beginpunt dat van vector $\vec{x}$ en eindpunt dat van $\vec{y}$. Zo geldt op de figuur hiernaast dat $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y}$.



Vaak wordt ook de *parallelogramregel* gebruikt om de som van twee vectoren te construeren. De som van twee vectoren is dan de diagonaal van het parallellogram met als zijden de twee vectoren.



Het is duidelijk dat voor vectoren *de formule van Chasles-Mobius* geldt:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Verschil van twee vectoren

Per definitie stellen we $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$

c) Het begrip reële vectorruimte

Noteren we de verzameling van alle vrije vectoren als $\mathcal{V}$, dan gelden de volgende eigenschappen:

- ① $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$ (de optelling van vectoren is inwendig)
- ② $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (de optelling van vectoren is commutatief)
- ③ $\exists \vec{0} \in \mathcal{V}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ (er is een neutraal element voor de optelling van vectoren)
- ④ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \exists -\vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$ (elke vector heeft een symmetrisch element)
- ⑤ $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathcal{V} : (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$ (de optelling van vectoren is associatief)
- ⑥ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot \vec{v} \in \mathcal{V}$ (het scalair product van een vector met een reëel getal is een vector)
- ⑦ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : r_1 \cdot (r_2 \cdot \vec{v}) = (r_1 \cdot r_2) \cdot \vec{v}$ (de scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief)
- ⑧ $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = r \cdot \vec{v}_1 + r \cdot \vec{v}_2$ (de scalaire vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van zowel de optelling in $\mathbb{R}$ als in $\mathcal{V}$)
- ⑨ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : (r_1 + r_2) \cdot \vec{v} = r_1 \cdot \vec{v} + r_2 \cdot \vec{v}$
- ⑩ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V} : 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} = \vec{v} \cdot 1$ (1 is het neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging)

In de wiskunde zeggen we dankzij deze 10 eigenschappen dat $\mathbb{R}, \mathcal{V}, +$ een *reële vectorruimte* is.

d) Puntvectoren

Kiezen we in de ruimte een willekeurig punt O (dat we *de oorsprong* zullen noemen) dan bepaalt elk punt van de ruimte een gebonden vector $\overrightarrow{OP}$, die we kortweg met $\vec{P}$ zullen noteren.

We kunnen elke vector noteren als verschil van twee puntvectoren, want wegens de formule van Chasles-Mobius geldt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} - \vec{A}$.

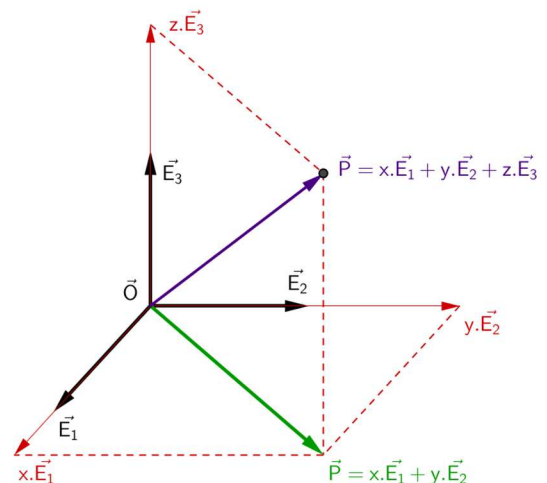
De verzameling van alle puntvectoren noemen we *de ruimte met oorsprong* en we noteren deze verzameling met Σ_O .

e) Coördinatenstelsels

Kiezen we in de ruimte drie puntvectoren $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ en $\vec{E}_3$ in een verschillende richting (en die niet in hetzelfde vlak liggen) dan kunnen we elk punt op een unieke manier schrijven als lineaire combinatie van die drie vectoren. We noemen die drie gekozen vectoren de basisvectoren van het assenstelsel.

Symbolisch: $\forall \vec{P}, \exists x, y, z \in \mathbb{R} : \vec{P} = x \cdot \vec{E}_1 + y \cdot \vec{E}_2 + z \cdot \vec{E}_3$.

We noemen het bijhorende getallentripel (x, y, z) de coördinaat van $\vec{P}$ ten opzichte van het assenstelsel $O\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}_3$, en noteren $co(\vec{P}) = (x, y, z)$.



De rechten OE_1 , OE_2 en OE_3 noemen we respectievelijk de x -as, y -as en z -as. Kiezen we de drie basisvectoren $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ en $\vec{E}_3$ onderling loodrecht op elkaar, dan noemen we het assenstelsel orthogonaal. Zijn ze bovendien even groot, dus $\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = \|\vec{E}_3\|$, dan spreken we van een georthonormeed assenstelsel.

f) De reële vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$

Door het invoeren van coördinaten ontstaat er een bijjectie (één-één verband) tussen de verzameling vectoren $\mathcal{V}$ en de verzameling reële drietallen $\mathbb{R}^3$. Ook de optelling van vectoren en het scalair product worden overgedragen van $\mathcal{V}$ naar $\mathbb{R}^3$, want:

- Som van twee vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$, met $co(\vec{v}_1) = (x_1, y_1, z_1)$ en $co(\vec{v}_2) = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= x_1 \cdot \vec{E}_1 + y_1 \cdot \vec{E}_2 + z_1 \cdot \vec{E}_3 + x_2 \cdot \vec{E}_1 + y_2 \cdot \vec{E}_2 + z_2 \cdot \vec{E}_3 \\ &= (x_1 + x_2) \cdot \vec{E}_1 + (y_1 + y_2) \cdot \vec{E}_2 + (z_1 + z_2) \cdot \vec{E}_3\end{aligned}$$

$$\text{Dus } co(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = co(\vec{v}_1) + co(\vec{v}_2)$$

- Scalair product van $r \in \mathbb{R}$, met een vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$, met $co(\vec{v}) = (x, y, z)$:

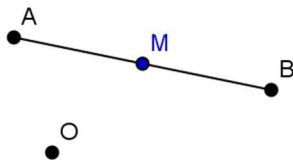
$$r\vec{v} = r(x \cdot \vec{E}_1 + y \cdot \vec{E}_2 + z \cdot \vec{E}_3) = rx \cdot \vec{E}_1 + ry \cdot \vec{E}_2 + rz \cdot \vec{E}_3$$

$$\text{Dus } co(r\vec{v}) = (rx, ry, rz) = r \cdot co(\vec{v})$$

We kunnen dus besluiten dat ook $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ een reële vectorruimte is.

g) Rekenen met puntvectoren

Midden van een lijnstuk



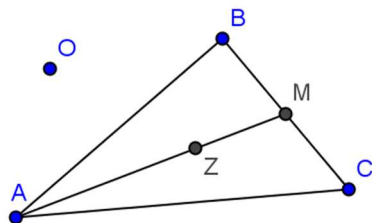
M is het midden van $[AB]$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{M} - \vec{A} = \vec{B} - \vec{M} \Leftrightarrow \vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$$

Dus ook voor de coördinaten geldt:

$$co(\vec{M}) = \frac{co(\vec{A}) + co(\vec{B})}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Zwaartepunt van een driehoek



Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$:

$$\vec{AZ} = 2 \cdot \vec{ZM} \Leftrightarrow \vec{Z} - \vec{A} = 2(\vec{M} - \vec{Z}) \Leftrightarrow 3\vec{Z} = \vec{A} + 2\vec{M}$$

Uit het voorgaande weten we dat $\vec{M} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$, dus

$$3\vec{Z} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \Rightarrow \vec{Z} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$$

$$\text{Dus ook: } co(\vec{Z}) = \frac{co(\vec{A}) + co(\vec{B}) + co(\vec{C})}{3} \Rightarrow Z\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

3) Vergelijkingen van rechten en vlakken

a) De vergelijking van een rechte

Vectorrechte – Richtingsvectoren – Richtingsgetallen

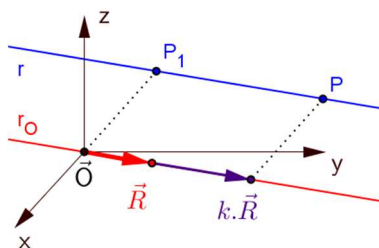
In twee dimensies weten we dat een rechte bepaald is door twee punten of door een punt en een richting(scoëfficiënt). In de ruimte blijft dit gelden, maar werken we met een richtingsvector. Elke rechte r heeft een evenwijdige rechte r_0 die door de oorsprong van het assenstelsel gaat. We noemen deze rechte r_0 de bijhorende *vectorrechte* bij die rechte r . Elk punt $\vec{R}$ van deze vectorrechte verschillend van de oorsprong bepaalt een puntvector die we een *richtingsvector* van de rechte r noemen. Volgende eigenschappen zijn onmiddellijk duidelijk:

- $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ zijn beide richtingsvectoren van eenzelfde rechte $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : \vec{R}_1 = k \cdot \vec{R}_2$.
- Evenwijdige rechten bepalen dezelfde vectorrechte en hebben dus dezelfde richtingsvectoren.
- Als we twee punten P_1 en P_2 kennen, dan is $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ een richtingsvector van rechte $P_1 P_2$.

De coördinaat van een richtingsvector $\vec{R}$ van r noemen we een stel *richtingsgetallen* van r . Het is duidelijk dat richtingsgetallen van een rechte slechts op een evenredigheidsfactor na bepaald zijn, net zoals richtingsvectoren. De vorige drie eigenschappen kunnen dus ook geformuleerd worden als volgt:

- (a_1, b_1, c_1) en (a_2, b_2, c_2) zijn twee stellen richtingsgetallen van eenzelfde rechte $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : (a_1, b_1, c_1) = k \cdot (a_2, b_2, c_2)$, of dus nog $a_1 = k \cdot a_2 \wedge b_1 = k \cdot b_2 \wedge c_1 = k \cdot c_2$.
- Richtingsgetallen van evenwijdige rechten zijn gelijk op een evenredigheidsfactor na.
- Als $P_1(x_1, y_1, z_1) \in r$ en $P_2(x_2, y_2, z_2) \in r$ dan is $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ een stel richtingsgetallen van r .

Vectorvergelijking van een rechte



Beschouw nu een rechte r waarvan een punt P_1 en een richtingsvector $\vec{R}$ gegeven zijn. De vector $\vec{P}_1$ noemen we een plaatsvector van rechte r .

Uit de figuur links blijkt dat we elke puntvector $\vec{P}$ van een punt P van de rechte r kunnen schrijven als:

$$r \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot \vec{R}, \text{ met } k \in \mathbb{R}.$$

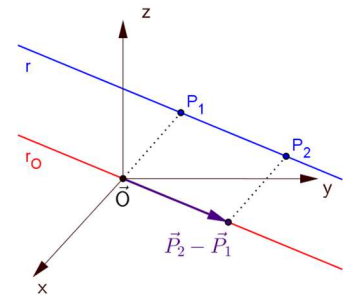
Dit heet een *vectorvergelijking* van rechte r .

Parametervergelijking van een rechte

Veranderen we in de vectorvergelijking de vectoren door de coördinaten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $R(a, b, c)$ en $P(x, y, z)$, dan vinden we: $r \leftrightarrow (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k \cdot (a, b, c)$.

Dit wordt meestal geschreven in stelselnotatie: $r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a \\ y = y_1 + k \cdot b \\ z = z_1 + k \cdot c \end{cases}$

Dit noemen we een *parametervergelijking* van rechte r .



Cartesische vergelijkingen van een rechte

Elimineren we parameter k uit het stelsel parametervergelijkingen hierboven dan vinden we vrijwel onmiddellijk dat: $r \leftrightarrow \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$. Deze formules noemen we een *stelsel cartesische vergelijkingen* van de rechte r . Merk op dat hier moet gelden dat $abc \neq 0$.

Als een van de richtingsgetallen 0 is, kan je als volgt te werk gaan (we nemen als voorbeeld $a = 0$):

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + k.b \\ z = z_1 + k.c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \end{cases}$$

Zijn twee van de richtingsgetallen 0, dan kan het als volgt (we nemen als voorbeeld $a = b = 0$):

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + k.c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

Voorbeeld 1: Bepaal een parametervergelijking en een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte r door de punten $Q(1,2,3)$ en $R(3,-2,4)$.

Als richtingsvector nemen we $\vec{Q}-\vec{R}$, dan hebben we als stel richtingsgetallen $(-2,4,-1)$. Als plaatsvector kiezen we voor Q (maar R had evengoed gekund). Dan krijgen we:

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2 + 4k \\ z = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow r \leftrightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

Dit kan ook geschreven worden als: $r \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$

Voorbeeld 2: Bepaal een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte s met richtingsvector $\vec{R}(1,-2,0)$ die door punt $S(4,-7,1)$ gaat.

$$\text{We vinden direct: } r \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + k \\ y = -7 - 2k \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = \frac{y + 7}{-2} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Onderlinge ligging van twee rechten

Om de ligging te bepalen van twee rechten wiens vergelijking je kent (of kan opstellen) ga je als volgt te werk:

- 1) Ga na of de rechten evenwijdig zijn (dus of de richtingsgetallen een veelvoud van elkaar zijn)
- 2) Als ze evenwijdig zijn kunnen ze eventueel samenvallen. Dat kan je controleren door een punt van de ene rechte in te vullen in een vergelijking van een andere rechte.
- 3) Zijn ze niet evenwijdig dan moet je op zoek gaan naar een eventueel snijpunt. Daartoe moet je een stelsel oplossen. Is dit stelsel strijdig dan zijn het kruisende rechten. Heeft dit stelsel een unieke oplossing dan is de oplossing het snijpunt van de twee rechten.

Voorbeeld 1: Onderzoek de ligging van $r_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 2 + 3k \\ z = -4 + 4k \end{cases}$ en $r_2 \leftrightarrow \frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-3}$.

De rechten zijn niet evenwijdig want $\forall k \in \mathbb{R} : (-3, 3, 4) \neq k(-5, 4, -3)$.

Vullen we de vergelijking van r_1 in bij r_2 dan vinden we: $\frac{1-3k-3}{-5} = \frac{2+3k-1}{4} = \frac{-4+4k-3}{-3}$.

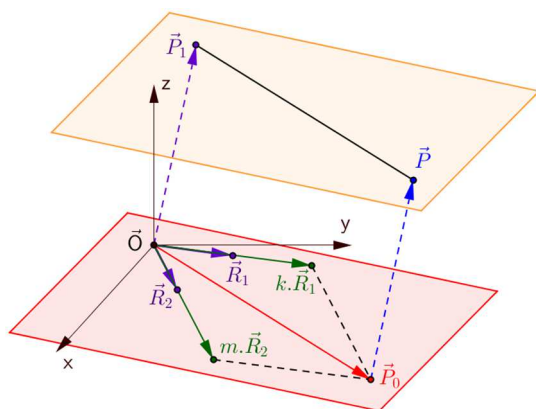
Dit stelsel heeft de unieke oplossing $k = 1$. De rechten snijden elkaar dus in punt $S(-2, 5, 0)$.

c) De vergelijking van een vlak

Vectorvlak – Richtingsvectoren – Richtingsgetallen

Elk vlak α heeft een evenwijdig vlak α_0 dat door de oorsprong van het assenstelsel gaat. We noemen dit vlak α_0 het bijhorende *vectorvlak* bij dat vlak α . Neem nu in dit vlak α_0 twee verschillende vectoren $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ zodat $O \notin R_1 R_2$. We noemen $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ een *stel richtingsvectoren* van het vlak α . We merken op dat dus $\forall k \in \mathbb{R} : \vec{R}_1 \neq k \cdot \vec{R}_2$, en zeggen dat de vectoren $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ *lineair onafhankelijk* zijn. Analoog aan de richtingsgetallen van een rechte kunnen we nu de coördinaten van twee richtingsvectoren definiëren als twee stellen richtingsgetallen van een vlak.

Vectorvergelijking van een vlak



Beschouw nu een vlak α waarvan een plaatsvector $\vec{P}_1$ (dus $P_1 \in \alpha$) en twee richtingsvectoren $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ gegeven zijn.

Uit de figuur links blijkt dat we elke puntvector $\vec{P}$ van een punt P van het vlak α kunnen schrijven als:

$$\alpha \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_0, \text{ met } P_0 \in \alpha_0.$$

Elke puntvector $\vec{P}_0$ van α_0 kunnen we schrijven als lineaire combinatie van $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$:

$$\exists k, m \in \mathbb{R} : \vec{P}_0 = k \cdot \vec{R}_1 + m \cdot \vec{R}_2.$$

Brengen we deze twee vergelijkingen samen dan krijgen we: $\alpha \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot \vec{R}_1 + m \cdot \vec{R}_2$. We noemen dit de *vectorvergelijking* van het vlak α .

Parametervergelijking van een vlak

Veranderen we in de vectorvergelijking de vectoren door de coördinaten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $R_1(a_1, b_1, c_1)$, $R_2(a_2, b_2, c_2)$ en $P(x, y, z)$, dan geldt:

$$\alpha \leftrightarrow (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k \cdot (a_1, b_1, c_1) + m \cdot (a_2, b_2, c_2).$$

Dit wordt meestal geschreven in stelselnotatie: $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a_1 + m \cdot a_2 \\ y = y_1 + k \cdot b_1 + m \cdot b_2 \\ z = z_1 + k \cdot c_1 + m \cdot c_2 \end{cases}$.

Cartesische vergelijking van een vlak

De parametervergelijking omvormen tot een cartesische vergelijking kan door de parameters k en m te elimineren uit het stelsel. De eliminatievoorwaarde die we vinden zal altijd een eerstegraadsvergelijking zijn in x, y en z .

Voorbeeld: Bepaal de vergelijkingen van het vlak α door punt $P_1(1, 3, -2)$ met richtingsvectoren $R_1(-1, 4, -3)$ en $R_2(2, -7, 4)$.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k + 2m \\ y = 3 + 4k - 7m \\ z = -2 - 3k + 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - x + 2m \\ y = 3 + 4(1 - x + 2m) - 7m \\ z = -2 - 3k + 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7x + 2y - 13 \\ m = 4x + y - 7 \\ z = -2 - 3(7x + 2y - 13) + 4(4x + y - 7) \end{cases}$$

De onderste vergelijking vereenvoudigen geeft: $5x + 2y + z - 9 = 0$. Dit is dus de cartesische vergelijking van het vlak α . We kunnen deze op een veel snellere manier opstellen met behulp van een *determinant*.

Determinantvergelijking van een vlak

We hernemen de parametervergelijking van een vlak α met twee richtingsvectoren $R_1(a_1, b_1, c_1)$ en $R_2(a_2, b_2, c_2)$ en een punt $P(x_1, y_1, z_1)$:

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = k \cdot a_1 + m \cdot a_2 + x_1 \\ y = k \cdot b_1 + m \cdot b_2 + y_1 \\ z = k \cdot c_1 + m \cdot c_2 + z_1 \end{cases} \text{ of nog } \begin{cases} k \cdot a_1 + m \cdot a_2 = x - x_1 \\ k \cdot b_1 + m \cdot b_2 = y - y_1 \\ k \cdot c_1 + m \cdot c_2 = z - z_1 \end{cases}, \text{ met } k, m \in \mathbb{R}.$$

We beschouwen dit als 3×2 -stelsel in de onbekenden k en m en herleiden met Gauss-Jordan:

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & x - x_1 \\ b_1 & b_2 & y - y_1 \\ c_1 & c_2 & z - z_1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \cdot a_1 - R_1 \cdot b_1]{R_1 \cdot b_2 - R_2 \cdot a_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_1 b_2 - b_1 a_2 & 0 & b_2(x - x_1) - a_2(y - y_1) \\ 0 & a_1 b_2 - b_1 a_2 & a_1(y - y_1) - b_1(x - x_1) \\ c_1 & c_2 & z - z_1 \end{array} \right]$$

Vermenigvuldigen we in dit stelsel de laatste rij nog met $a_1 b_2 - b_1 a_2$ dan krijgen we het stelsel:

$$\begin{cases} (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot k = b_2(x - x_1) - a_2(y - y_1) \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot m = a_1(y - y_1) - b_1(x - x_1) \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2) c_1 \cdot k + (a_1 b_2 - b_1 a_2) c_2 \cdot m = (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot (z - z_1) \end{cases}.$$

Vullen we de eerste twee vergelijkingen in in de derde vergelijking dan krijgen we:

$$c_1 \cdot (b_2(x - x_1) - a_2(y - y_1)) + c_2 \cdot (a_1(y - y_1) - b_1(x - x_1)) = (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot (z - z_1).$$

Alles naar het rechterlid brengen en een beetje vereenvoudigen geeft ons dan deze vergelijking:

$$0 = (x - x_1) \cdot (b_1 c_2 - c_1 b_2) - (y - y_1) \cdot (a_1 c_2 - c_1 a_2) + (z - z_1) \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

De uitdrukking in het rechterlid kunnen we per definitie schrijven als een 3×3 -determinant, namelijk:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (x - x_1) \cdot (b_1 c_2 - c_1 b_2) - (y - y_1) \cdot (a_1 c_2 - c_1 a_2) + (z - z_1) \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

Opmerking: We hebben nu eigenlijk bewezen dat de vergelijking van elk vlak kan geschreven worden in de vorm $ux + vy + wz + t = 0$, een eerstegraadsvergelijking in de onbekenden x, y en z .

d) Onderlinge ligging van twee vlakken

Beschouw twee vlakken $\alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$.

Om eventuele snijpunten te zoeken moet we dus het stelsel
$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{cases}$$
 oplossen.

Als de vergelijkingen een veelvoud zijn van elkaar dan is het duidelijk dat de vlakken samenvallen.

Dat is dus als en slechts als: $\exists k \in \mathbb{R}_0 : u_1 = k.u_2 \wedge v_1 = k.v_2 \wedge w_1 = k.w_2 \wedge t_1 = k.t_2$

Als dit stelsel geen oplossing heeft dan zijn de vlakken evenwijdig. Dit kan enkel als en slechts als:

$\exists k \in \mathbb{R}_0 : u_1 = k.u_2 \wedge v_1 = k.v_2 \wedge w_1 = k.w_2 \wedge t_1 \neq k.t_2$

In alle andere gevallen zullen de twee vlakken α en β elkaar snijden in een rechte. We hebben echter al gezien dat we een rechte kunnen schrijven als een stelsel cartesische vergelijkingen van de eerste orde. In dit geval kan je dus de rechte dus interpreteren als de snijlijn van die twee vlakken.

- Gevolgen:*
- Als je t laat variëren in de vergelijking $ux + vy + wz + t = 0$ dan krijg je allemaal evenwijdige vlakken.
 - Als een vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ gegeven is dan vind je de vergelijking van het bijhorende vectorvlak door $t = 0$ te stellen: $\alpha_0 \leftrightarrow ux + vy + wz = 0$.

Voorbeeld: Bepaal een richtingsvector en een plaatsvector van de snijlijn van de twee vlakken $\alpha \leftrightarrow x + 2y + 3z - 6 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 4x - 2y - z - 1 = 0$.

We lossen dus het bijhorende stelsel op (kan ook eventueel met behulp van de GRM):

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ 4x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7/5 - 2/5 \cdot k \\ y = 23/10 - 13/10 \cdot k \\ z = k \end{cases}$$

*: de matrix $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right]$ herleiden tot de rijcanonieke vorm geeft: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 13/10 & 23/10 \end{array} \right]$.

Een richtingsvector van de snijlijn is $\vec{R}(-2/5, -13/10, 1)$ en een plaatsvector is $\vec{P}(7/5, 23/10, 0)$.

Je weet dat een richtingsvector slechts op een veelvoud na bepaald is, dus ook $\vec{R}'(4, 13, -10)$ kan.

Merk op dat je ook een richtingsvector kan vinden door het homogene stelsel
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x - 2y - z = 0 \end{cases}$$
 op te lossen.

(de snijlijn van de vlakken is evenwijdig met de snijlijn van hun vectorvlakken). Dit stelsel oplossen kan ook

heel snel met behulp van determinanten: dan is $\vec{R} \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \right) = \vec{R}'$.

e) Vlakkenwaaiers

Een vlakkenwaaier is een verzameling van alle vlakken die door eenzelfde rechte gaan.

Stel dat s de snijlijn is van de vlakken α en β , dus $s \leftrightarrow \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 & (\leftrightarrow \alpha) \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 & (\leftrightarrow \beta) \end{cases}$.

Elk vlak dat s omvat kan geschreven worden als: $k(u_1x + v_1y + w_1z + t_1) + m(u_2x + v_2y + w_2z + t_2) = 0$, met $k, m \in \mathbb{R}$.

We noemen dit dus de vergelijking van de vlakkenwaaier door rechte s .

Voorbeeld: Stel de vergelijking op van het vlak door $s \leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+5$ dat $P(1, 2, -5)$ bevat.

We gebruiken de vlakkenwaaier door $s : \alpha \leftrightarrow k(3x-2y-3) + m(y-3z-15) = 0$, met $k, m \in \mathbb{R}$.

$P \in \alpha \Leftrightarrow k(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3) + m(2 - 3 \cdot (-5) - 15) = 0 \Leftrightarrow -4k + 2m = 0$. Kies dus bvb.: $k = 1, m = 2$,

dan wordt: $\alpha \leftrightarrow 1 \cdot (3x - 2y - 3) + 2 \cdot (y - 3z - 15) = 0$, of nog: $\alpha \leftrightarrow 3x - 6z - 33 = 0$, wat je kan vereenvoudigen tot $\alpha \leftrightarrow x - 2z - 11 = 0$.

f) Onderlinge ligging van rechten en vlakken

De onderlinge ligging van een rechte en een vlak is heel eenvoudig te bepalen door het bijhorende stelsel op te lossen. Dit is het makkelijkst als de rechte gegeven is door een stel cartesische vergelijkingen.

Als dit stelsel geen oplossingen heeft (als het vals is) dan is de rechte strikt evenwijdig met het vlak.

Als dit stelsel oneindig veel oplossingen heeft (als het onbepaald is) dan ligt de rechte in het vlak.

Als dit stelsel een unieke oplossing heeft dan is deze oplossing het snijpunt van de rechte met dat vlak.

Voorbeeld 1: Bepaal het snijpunt van $\alpha \leftrightarrow 2x - 4y + 3z - 1 = 0$ met $r \leftrightarrow x - 3 = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{2}$.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z - 1 = 0 \\ 3(x-3) = y-4 \\ 2(y-4) = 3(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - y = 5 \\ 2y - 3z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{het snijpunt is dus } P(1, -2, -3).$$

Voorbeeld 2: Bewijs dat de rechte r met richtingsvector $\vec{R}(7, -5, -1)$ en plaatsvector $\vec{P}(1, 8, -3)$ strikt evenwijdig is met het vlak $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 3z + 5 = 0$.

We zouden dit kunnen oplossen door eerst een stelsel cartesische vergelijkingen te zoeken van r , maar het is eenvoudiger aan te tonen dat $\vec{R} \in \alpha_0$ (want dan is $r \parallel \alpha$) en $\vec{P} \notin \alpha$ (strikt evenwijdig).

$\vec{R} \in \alpha_0$ want $7 + 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-1) = 0$ en $\vec{P} \notin \alpha$ want $1 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot (-3) + 5 \neq 0$.

4) Loodrechte stand

a) De afstand tussen twee punten in de ruimte

Ten opzichte van een georthonormeed assenstelsel xyz met oorsprong

O geldt voor een punt $P(x_1, y_1, z_1)$ dat: $|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

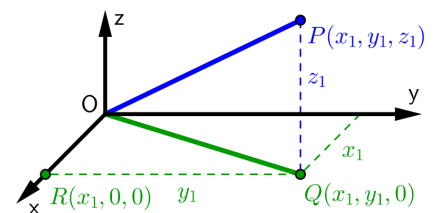
Bewijs: in $\triangle OQR$: $|OQ|^2 = |OR|^2 + |QR|^2 = x_1^2 + y_1^2$

In $\triangle OPQ$: $|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

In vectornotatie genoteerd geeft dit dus: $\|\vec{P}\| = \|\vec{OP}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Voor de afstand tussen twee willekeurige punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ leiden we dan af:

$$|P_1P_2| = \|\vec{P_1P_2}\| = \|\vec{P_2} - \vec{P_1}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



b) Het scalair product van twee vectoren

Def.: In een georthonormeerde assenstelsel definiëren we het *scalair product van twee vectoren* $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ en $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ als $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Noteren we nu met $\mathcal{V}_o$ de verzameling van vectoren verschillend van de nulvector, dan geldt:

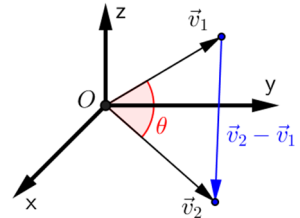
Stelling: $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}_o : \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$, met $\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}$ de ingesloten hoek van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.

Bewijs: In de driehoek opgespannen door de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$, geldt

de cosinusregel, met $\theta = \widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}$:

$$\|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - 2 \cdot \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos \theta,$$

$$\text{dus } 2 \cdot \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos \theta = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|^2.$$



(Merk op dat de cosinusregel ook geldt in het geval dat $\theta = 0^\circ$ of $\theta = 180^\circ$, dus als $\vec{v}_1$ een veelvoud zou zijn van $\vec{v}_2$).

Met behulp van de afstandsformule die we net bewezen hebben kunnen we dit vereenvoudigen tot:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos \theta &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right) \\ &= 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2, \end{aligned}$$

waaruit onmiddellijk de gezochte formule volgt. $\square$

We kunnen nu enkele heel eenvoudige eigenschappen opsommen:

- $\forall \vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{v} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0$
- $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} : \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$
- $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}_o : \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}_o : \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

c) Loodrechte stand van twee rechten

Stelling: Twee rechten r_1 en r_2 met richtingsvectoren $\vec{R}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{R}_2(a_2, b_2, c_2)$ staan loodrecht op elkaar als en slechts $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Bewijs: $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{R}_1 \perp \vec{R}_2 \Leftrightarrow \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. $\square$

d) Normaalvectoren van vlakken

Een *normaalvector* van een vlak is een vector (verschillend van de nulvector) die loodrecht staat op dat vlak.

Stelling: $\vec{N}(u, v, w)$ is een normaalvector van vlak $\alpha \Leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$.

Bewijs: $\vec{N} \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{N} \perp \alpha_0$ (met α_0 het vectorvlak van α , dus $\alpha_0 \Leftrightarrow ux + vy + wz = 0$ en $\alpha \parallel \alpha_0$).

$$\Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{P}, \forall \vec{P} \in \alpha_0 \text{ (definitie van loodrechte stand)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{P} = 0 \text{ (eigenschap scalair product)}$$

$$\Leftrightarrow ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0, \text{ met } \vec{P}(x_0, y_0, z_0)$$

Dit laatste klopt sowieso omdat $P \in \alpha_0$. $\square$

Voorbeeld: Stel de vergelijking op van de loodlijn op $\alpha \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 5 = 0$ die door punt $P(0, 1, 2)$ gaat.

Dit is de rechte met richtingsvector $\vec{R}(2, -1, 3)$ en plaatsvector $\vec{P}(0, 1, 2)$: $r \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

e) Loodrechte stand van vlakken

Stelling: Als $\alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$, dan geldt:

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0.$$

Bewijs: Noem $\vec{N}_1(u_1, v_1, w_1)$ en $\vec{N}_2(u_2, v_2, w_2)$ de normaalvectoren van beide vlakken. We weten:

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0 \text{ (zie ook stelling 10)}. \square$$

5) Afstanden

a) Afstand van een punt tot een rechte

Voorbeeld: Bepaal de afstand van punt $P(1, 2, 3)$ tot rechte $r \leftrightarrow \frac{x-2}{2} = y+1 = \frac{z-3}{-4}$.

We noemen α het vlak dat loodrecht staat op r en door P gaat:

$$\alpha \leftrightarrow 2(x-1) + (y-2) - 4(z-3) = 0, \text{ of eenvoudiger: } \alpha \leftrightarrow 2x + y - 4z + 8 = 0.$$

$$\text{Het snijpunt van } \alpha \text{ en } r \text{ is } P'(44/21, -20/21, 59/21): \begin{cases} x-2y-4=0 \\ 4y+z+1=0 \\ 2x+y-4z+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=44/21 \\ y=-20/21 \\ z=59/21 \end{cases}$$

$$\text{Dus } d(P, r) = |PP'| = \sqrt{(44/21-1)^2 + (-20/21-2)^2 + (59/21-3)^2} = \sqrt{209/21}.$$

b) Afstand van een punt tot een vlak

Stelling: Zij $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ en $P(x_1, y_1, z_1)$, dan geldt: $d(\alpha, P) = \frac{|ux_1 + vy_1 + wz_1 + t|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$.

$$\text{Bewijs: Noem } l \text{ de loodlijn uit } P \text{ op } \alpha, \text{ dan geldt: } l \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot u \\ y = y_1 + k \cdot v \\ z = z_1 + k \cdot w \end{cases}$$

Er is dus een $k' \in \mathbb{R}$ zodat $P'(x_1 + k' \cdot u, y_1 + k' \cdot v, z_1 + k' \cdot w) \in \alpha$. Voor dit punt geldt:

$$|PP'| = \sqrt{(x_1 + k' \cdot u - x_1)^2 + (y_1 + k' \cdot v - y_1)^2 + (z_1 + k' \cdot w - z_1)^2} = |k'| \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Anderzijds geldt: $P' \in \alpha \Leftrightarrow u(x_1 + k' \cdot u) + v(y_1 + k' \cdot v) + w(z_1 + k' \cdot w) + t = 0$

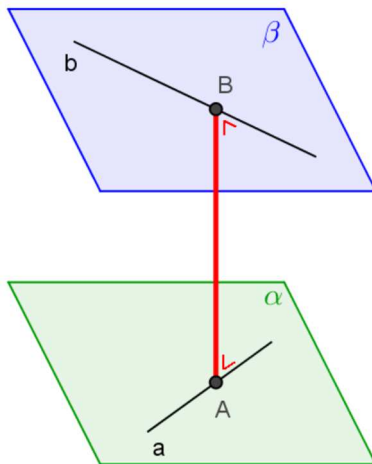
$$\Leftrightarrow ux_1 + vy_1 + wz_1 + t + k'(u^2 + v^2 + w^2) = 0 \Leftrightarrow k' = -\frac{ux_1 + vy_1 + wz_1 + t}{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$\text{Zodat } |PP'| = \left| -\frac{ux_1 + vy_1 + wz_1 + t}{u^2 + v^2 + w^2} \right| \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{|ux_1 + vy_1 + wz_1 + t|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \quad \square$$

Voorbeeld: Bepaal de afstand van vlak $\alpha \leftrightarrow 2x - y + 3z + 5 = 0$ tot punt $P(0, 1, 2)$.

$$d(\alpha, P) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 + 3 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

c) Gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten



Het is duidelijk dat elk paar kruisende rechten juist één gemeenschappelijke loodlijn heeft. Het is de kortste verbinding tussen de beide rechten.

Op de figuur hiernaast is AB de gemeenschappelijke loodlijn van de rechten a en b .

Op de figuur staat een *verpakking* getekend van de kruisende rechten. Dit zijn twee vlakken α en β zodat $a \subset \alpha$ en $b \parallel \alpha$, en $b \in \beta$ en $a \parallel \beta$. De afstand tussen de kruisende rechten is dus ook gelijk aan de afstand tussen de vlakken van hun verpakking.

Voorbeeld 1: Bepaal een vergelijking van de gemeenschappelijk loodlijn en de kortste afstand tussen de rechten a met richtingsvector $\vec{R}_a(3, 4, 1)$ door punt $P_a(7, 12, 0)$ en b met richtingsvector $\vec{R}_b(3, -2, -2)$ door punt $P_b(6, -1, 2)$.

Elk punt van rechte a kan dus geschreven worden als $A(7 + 3k_1, 12 + 4k_1, k_1)$, en elk punt van rechte b kan geschreven worden als $B(6 + 3k_2, -1 - 2k_2, 2 - 2k_2)$. Voor de vector $\overrightarrow{AB}$ geldt dan:

$$co(\overrightarrow{AB}) = co(\vec{B}) - co(\vec{A}) = (-3k_1 + 3k_2 - 1, -4k_1 - 2k_2 - 13, -k_1 - 2k_2 + 2).$$

$$\overrightarrow{AB} \perp a \Leftrightarrow 3 \cdot (-3k_1 + 3k_2 - 1) + 4 \cdot (-4k_1 - 2k_2 - 13) + 1 \cdot (-k_1 - 2k_2 + 2) = 0 \Leftrightarrow -26k_1 - k_2 - 53 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp b \Leftrightarrow 3 \cdot (-3k_1 + 3k_2 - 1) - 2 \cdot (-4k_1 - 2k_2 - 13) - 2 \cdot (-k_1 - 2k_2 + 2) = 0 \Leftrightarrow k_1 + 17k_2 + 19 = 0$$

Lossen we beide vergelijkingen op naar k_1 en k_2 dan vinden we $k_1 = -2$ en $k_2 = -1$.

Zo vinden we dus de coördinaten $A(1, 4, -2)$ en $B(3, 1, 4)$, en voor de richting $\overrightarrow{AB}(2, -3, 6)$.

Als vergelijking voor de gemeenschappelijke loodlijn krijgen we dus $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+2}{6}$.

Voor de kortste afstand tussen a en b geldt: $d(a, b) = |AB| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$.

Alternatieve methode voor de kortste afstand:

Noem α het vlak zodat $a \subset \alpha$ en $b \parallel \alpha$, dan geldt: $\alpha \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-7 & y-12 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Dit geeft: $\alpha \Leftrightarrow -6x + 9y - 18z - 66 = 0$ of eenvoudiger $\alpha \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z + 22 = 0$.

Dan geldt: $d(a, b) = d(\alpha, P_b) = \frac{|2 \cdot 6 - 3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 22|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{49}{7} = 7$.

Deze methode is veel sneller maar geeft geen inzicht over de richting van AB .

6) Hoeken

a) De hoek tussen twee rechten

In een georthonormeed assenstelsel is de hoek tussen twee rechten gelijk aan de hoek tussen de richtingsvectoren. Dus geldt voor twee rechten met als richting $\vec{R}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{R}_2(a_2, b_2, c_2)$:

$$\cos(\widehat{\vec{R}_1, \vec{R}_2}) = \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{\|\vec{R}_1\| \cdot \|\vec{R}_2\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Beperken we de hoek tussen rechten tot scherpe of rechte hoeken ($\cos \theta \geq 0$), dan wordt dit:

$$\cos(\widehat{\vec{R}_1, \vec{R}_2}) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Voorbeeld: bepaal de hoek tussen $a \leftrightarrow \frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-5}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0 \\ z = 4 \end{cases}$.

Twee richtingsvectoren voor deze rechten zijn: $\vec{R}_a(2, 3, -5)$ en $\vec{R}_b(2, 4, 0)$, zodat dus geldt:

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 5 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{16}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{20}} \Rightarrow (\widehat{a, b}) \approx 54^\circ 31' 22''.$$

b) De hoek tussen twee snijdende vlakken

Stelling: Als $\alpha \leftrightarrow u_1 x + v_1 y + w_1 z + t_1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow u_2 x + v_2 y + w_2 z + t_2 = 0$, dan geldt:

$$\cos(\widehat{\alpha\beta}) = \frac{|u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2|}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \cdot \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}.$$

Bewijs: Neem een punt P dat niet op α , noch op β ligt.

Noem A de loodrechte projectie van P op α en B de loodrechte projectie van P op β .

Noem S het snijpunt van vlak $\gamma = vl(P, A, B)$ met de snijlijn s van α en β .

$$\left. \begin{array}{l} PA \perp \alpha \Rightarrow PA \perp s \\ PB \perp \beta \Rightarrow PB \perp s \end{array} \right\} \Rightarrow s \perp \gamma \Rightarrow s \perp SA \wedge s \perp SB.$$

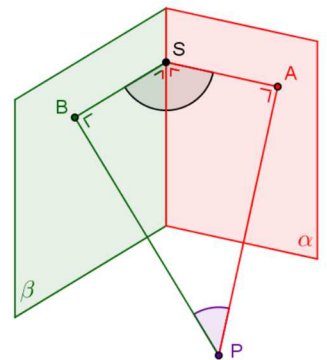
Per definitie geldt dus dat $\widehat{\alpha\beta} = (\widehat{AS, SB})^{\text{suppl.}} = (\widehat{AP, PB})$

(verklaring voor de laatste gelijkheid: de hoeken $\widehat{ASB}$ en $\widehat{APB}$ zijn supplementair in omdat in vierhoek $PBSA$ geldt dat $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, en de hoek tussen twee rechten is sowieso scherp of recht).

De normaalvector van α is evenwijdig met PA en de normaalvector van β is evenwijdig met PB , zodat inderdaad geldt dat $\widehat{\alpha\beta} = (\widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta})$. $\square$

Voorbeeld: bepaal de hoek tussen de vlakken $\alpha \leftrightarrow 2x + 4y - 5z + 1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 3x + 5z = 0$.

$$\cos(\widehat{\alpha\beta}) = \frac{|2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 5^2}} = \frac{19}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{34}} \Rightarrow (\widehat{\alpha\beta}) \approx 60^\circ 56' 19''$$



c) De hoek tussen een rechte en een vlak

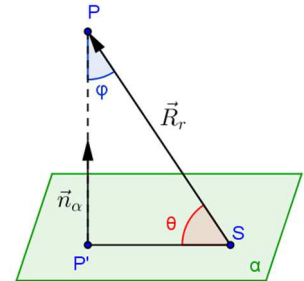
Stelling: Als gegeven zijn een vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ en een rechte r (die α snijdt) met

richtingsvector $\vec{R}_r(a, b, c)$, dan geldt: $\sin(\widehat{\alpha, r}) = \frac{|ua + vb + wc|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Bewijs: Per definitie is de hoek tussen een rechte en een vlak de hoek die gevormd wordt door het vlak en de loodrechte projectie van de rechte op dat vlak.

Neem een punt P op rechte r zodat $\overrightarrow{SP} = \vec{R}_r$, waarbij S het snijpunt is van α en r .

Noem P' de loodrechte projectie van P op α . Dan is dus PP' evenwijdig met elke normaalvector $\vec{n}_\alpha$ van vlak α .



In driehoek $\triangle SPP'$ geldt $(\widehat{\alpha, r}) = \theta = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - (\widehat{\vec{R}_r, \vec{n}_\alpha})$, zodat inderdaad geldt:

$$\sin(\widehat{\alpha, r}) = \sin\left(90^\circ - (\widehat{\vec{R}_r, \vec{n}_\alpha})\right) \stackrel{\text{compl}}{=} \cos(\widehat{\vec{R}_r, \vec{n}_\alpha}) = \frac{|ua + vb + wc|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Voorbeeld: bepaal de hoek tussen $\alpha \leftrightarrow 2x + 4y - 5z + 1 = 0$ en $r \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$.

We herschrijven $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 6/5 + 7/10 \cdot k \\ y = 8/5 + 8/5 \cdot k \\ z = k \in \mathbb{R} \end{cases}$, zodat $\vec{R}_r(7, 16, 10)$. De hoek wordt dus gegeven door:

$$\sin(\widehat{\alpha, r}) = \frac{|2 \cdot 7 + 4 \cdot 16 - 5 \cdot 10|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 16^2 + 10^2}} = \frac{28}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{405}} \Rightarrow (\widehat{\alpha, r}) \approx 11^\circ 58' 14''$$

7) Meetkundige plaatsen in de ruimte

a) Bollen

De verzameling punten die op een gegeven afstand r liggen van een gegeven punt $M(x_0, y_0, z_0)$ noemen we de bol $\mathcal{B}_{(M, r)}$ met middelpunt M en straal r (naar analogie met een cirkel in een vlak)

$$P(x, y, z) \in \mathcal{B}_{(M, r)} \Leftrightarrow |MP| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r.$$

$$\text{Er geldt dus: } \boxed{\mathcal{B}_{(M, r)} \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2}$$

Voorbeeld: Stel de vergelijking op van de bol $\mathcal{B}$ met middelpunt $M(1, -2, 5)$ en straal $r = \sqrt{2}$.

$$\mathcal{B} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 2 \text{ of nog } \mathcal{B} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 10z + 28 = 0.$$

b) Middelloodvlakken

De verzameling punten die even ver liggen van twee gegeven punten A en B liggen in een vlak dat het middelloodvlak van het lijnstuk $[AB]$ wordt genoemd. Dit is het vlak dat door het midden M van $[AB]$ gaat en er loodrecht op staat (de tweedimensionale variant is uiteraard de middelloodlijn).

Voorbeeld: Bepaal de vergelijking van het middelloodvlak van $[AB]$ als $A(1,2,3)$ en $B(5,6,7)$.

Het midden M van $[AB]$ is $M(3,4,5)$. Een normaalvector van λ is $N_\lambda = \overrightarrow{AB}(4,4,4) \sim (1,1,1)$.

We vinden dan eenvoudig dat $\lambda \leftrightarrow (x-3) + (y-4) + (z-5) = 0$ of nog $\lambda \leftrightarrow x + y + z - 12 = 0$.

c) Bisectorvlakken

De verzameling punten die even ver liggen van twee gegeven vlakken liggen ook op twee vlakken die we de bisectorvlakken noemen van die twee gegeven vlakken (naar analogie met bissectrices in twee dimensies). Een algemene vergelijking opstellen is hier niet erg handig, dus bekijken we meteen een...

Voorbeeld: stel de vergelijking op van de bisectorvlakken γ_1 en γ_2 van $\alpha \leftrightarrow 3x - 4y + 6 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x - 3y - 6z + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} P(x, y, z) \in \text{biss}(\alpha, \beta) &\Leftrightarrow d(P, \alpha) = d(P, \beta) \Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|2x - y - 6z + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} \\ &\Leftrightarrow 7 \cdot |3x - 4y + 6| = 5 \cdot |2x - y - 6z + 1| \end{aligned}$$

Dus $\gamma_1 \Leftrightarrow 7(3x - 4y + 6) = 5(2x - y - 6z + 1)$ en $\gamma_2 \Leftrightarrow 7(3x - 4y + 6) = -5(2x - y - 6z + 1)$, of nog eenvoudiger geschreven $\gamma_1 \leftrightarrow 11x - 23y + 30z + 37 = 0$ en $\gamma_2 \leftrightarrow 31x - 33y - 30z + 47 = 0$.