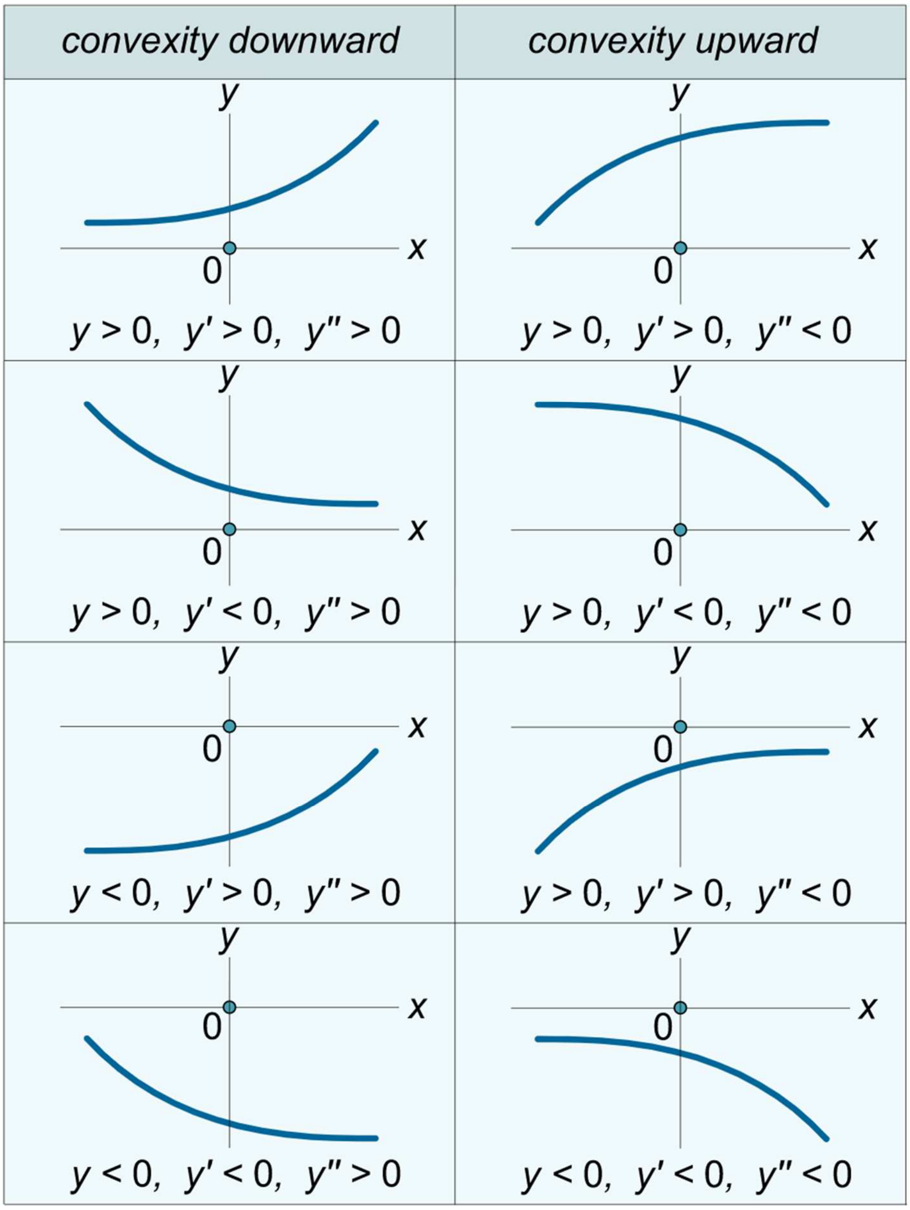
Verloop van algebraïsche functies



1) Enkele belangrijke stellingen opgefrist

De stelling van Rolle

Stelling: f is continu in $[a,b]$, afleidbaar in $]a,b[$, en $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c)=0$.

De middelwaardestelling van Lagrange

Stelling: f is continu in $[a,b]$, afleidbaar in $]a,b[\Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Het teken van de eerste afgeleide

Stelling: Als f afleidbaar is in $[a,b]$, dan geldt: f is stijgend in $[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f'(x) \geq 0$.

Stelling: Als f afleidbaar is in $[a,b]$, dan geldt: f is dalend in $[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f'(x) \leq 0$.

Stelling: Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met $\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0$, dan is f stijgend in $[a,b]$.

Stelling: Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met $\forall x \in]a,b[: f'(x) < 0$, dan is f dalend in $[a,b]$.

Stelling: Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, dan geldt:

$$\forall x \in]a,b[: f'(x)=0 \Leftrightarrow f \text{ is constant in } [a,b].$$

Extrema van een functie

Stelling: Is f afleidbaar in c en bereikt f een relatief extremum in c, dan is $f'(c)=0$.

Stelling: Is f continu in c en bestaat er een B_c zodat f afleidbaar is in $B_c \setminus \{c\}$ zodat bovendien $\forall x \in B_c : \begin{cases} x < c \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > c \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases}$, dan bereikt f een relatief minimum in c.

Stelling: Is f continu in c en bestaat er een B_c zodat f afleidbaar is in $B_c \setminus \{c\}$ zodat bovendien $\forall x \in B_c : \begin{cases} x < c \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > c \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$, dan bereikt f een relatief maximum in c.

Het teken van de tweede afgeleide

Stelling: Is f tweemaal afleidbaar in c, met $f'(c)=0$, en is f'' continu in een basisomgeving B_c, met $\forall x \in B_c : f''(x) > 0$, dan bereikt f een relatief minimum in c.

Stelling: Is f tweemaal afleidbaar in c, met $f'(c)=0$, en is f'' continu in een basisomgeving B_c, met $\forall x \in B_c : f''(x) < 0$, dan bereikt f een relatief maximum in c.

2) Limieten van irrationale functies

In de cursus differentiaalrekening beperkten we ons tot hiertoe vooral tot veeltermen en rationale functies. Het hoofddoel van de komende hoofdstukken is dit uitbreiden naar de andere functies die we ingevoerd hebben, zoals irrationale functies, exponentiële en logaritmische functies, en goniometrische en cyclometrische functies.
We frissen eerst de gekende regels voor limieten nog eens op.

a) ***Limieten van veeltermen en rationale functies***

Veeltermfuncties

Stel dat $f(x)=c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0$, met $c_n \neq 0$, dan geldt:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (de functiewaarde berekenen)
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty} c_n x^n$ (de limiet van de hoogstegraadsterm)

Rationale functies

Stel dat $f(x)=\dfrac{T(x)}{N(x)}=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}$, dan geldt:

- Als $N(a)\neq 0$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{T(a)}{N(a)}$ (de functiewaarde berekenen)
- Als $N(a)=0 \wedge T(a)\neq 0$ dan heeft de functie een verticale asymptoot $x=a$. Om de linker en rechterlimieten voor $x\to a$ te berekenen (altijd $+\infty$ of $-\infty$) is een tekentabel nodig.
- Als $N(a)=0 \wedge T(a)=0$ dan kan je met het algoritme van Horner de graad van de teller en de noemer verlagen. Je krijgt dan een nieuwe eenvoudigere limiet.

$$\lim_{x\to a} f(x) \overset{\boxed{Horner}}{=} \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\left(a'_{n-1}x^{n-1}+a'_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a'_2x^2+a'_1x+a'_0\right)}{\cancel{(x-a)}\left(b'_{m-1}x^{m-1}+b'_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b'_2x^2+b'_1x+b'_0\right)}$$

- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ (de limiet van het quotiënt van de hoogstegraadstermen)

b) ***Limieten van irrationale functies***

Stel dat f een irrationale functies is. Als de functiewaarde $f(a)$ gedefinieerd is (niet onbepaald) zal zoals bij alle andere functies ook hier gelden dat $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. We bekijken de mogelijke onbepaaldheden van dichterbij:

- $\boxed{\dfrac{r}{0}\,(\text{met } r\neq 0)}$ Net als bij rationale functies is er hier een tekenonderzoek nodig.

Voorbeeld: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2}\left(=\dfrac{5}{0}\right)$

x	$-\infty$	-1		$1/2$		3	$+\infty$
$\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2}$	///	+	+	0	-	|	+

Dus $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2}=-\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}-2}=+\infty$

- $\boxed{\frac{0}{0}}$ Hier moet vermenigvuldigd worden met de toegevoegde wortelvorm omdat je pas dan (met of zonder Horner) het gemeenschappelijke nulpunt kan wegdelen.

  Voorbeeld: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-\sqrt{3x-2}\right).\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(x^2-2x\right).\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$

  $$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(3x-2)}{\left(x^2-2x\right).\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}.(x-1)}{x.\cancel{(x-2)}.\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\frac{1}{8}$$

Ook voor de oneindige limieten $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ zijn er methodes om onbepaaldheden weg te werken:

- $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ Hier kan de hoogste macht van x in teller en noemer voorop gezet worden. Hiervoor moet x soms vanonder een wortelteken gehaald worden.

  ⚠ Let daarbij op: Als $x\to+\infty$ dan is $\sqrt{x^2}=x$, maar als $x\to-\infty$ dan is $\sqrt{x^2}=-x$ ⚠

  Voorbeeld: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3+\sqrt{x^2+3x-5}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}.\left(2-\cancel{\frac{3}{x}}-\sqrt{1+\cancel{\frac{3}{x}}-\cancel{\frac{5}{x^2}}}\right)}{\cancel{x}.\left(3+\cancel{\frac{1}{x}}\right)}=\dfrac{1}{3}$

- $\boxed{+\infty-\infty}$ Vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm herleidt deze onbepaaldheid tot het vorige geval.

  Voorbeeld: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right).\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

  $$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}.\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

3) Asymptoten

a) *Verticale asymptoten*

De (grafiek van een) functie f heeft een *verticale asymptoot (VA)* met vergelijking $x=a$ als en slechts als: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}}f(x)=+\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}}f(x)=+\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}}f(x)=-\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}}f(x)=-\infty$.

Verticale asymptoten kunnen enkel voorkomen op de grens van het domein van een functie, aangezien een functiewaarde zelf niet oneindig kan zijn.

Voorbeeld: De functie $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ heeft een verticale asymptoot $v\leftrightarrow x=2$ want:

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}=-\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}=+\infty$

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$		///	0	-	|	+	

Merk op dat $x=-2$ wel een nulpunt is van de noemer van deze functie maar dit levert geen verticale asymptoot omdat de teller daar niet gedefinieerd is. Het domein is $dom\ f=[1,2[\cup]2,+\infty[$.

b) ***Horizontale asymptoten***

De (grafiek van een) functie f heeft een *horizontale asymptoot (HA)* met vergelijking $y=b$ als en slechts als: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ of $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

Voorbeeld: De functie $f(x)=x+1+\sqrt{x^2-1}$ heeft een horizontale asymptoot $h\leftrightarrow y=1$ want:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x+1-\sqrt{x^2-1}\right)}{x+1-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{x+1-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\cancel{\frac{2}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}}\right)}=1$$

c) ***Schuine asymptoten***

Om schuine asymptoten te berekenen kunnen we een beroep doen op *de formules van Cauchy:*

Stelling: Als $y=mx+q$ een SA is van f, dan is $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ en $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

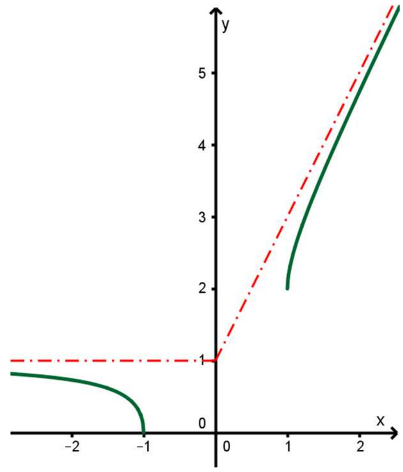
Voorbeeld: De functie $f(x)=x+1+\sqrt{x^2-1}$ heeft een schuine asymptoot $s\leftrightarrow y=2x+1$ want:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\cancel{1/c}+\sqrt{1-\cancel{1/x^2}}\right)}{\cancel{x}}=2$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2-1}-2x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-x+1+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(-x+1-\sqrt{x^2-1}\right)}{-x+1-\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+2}{-x+1-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-2+\cancel{2/x}\right)}{\cancel{x}\left(-1+\cancel{1/x}-\sqrt{1-\cancel{1/x^2}}\right)}=1$$



Opmerking: bij rationale functies zagen we dat een functie maar één HA of SA kan hebben, maar nu merk je dat dit bij andere soorten functies niet zo is. Het gedrag op $-\infty$ hoeft niet noodzakelijk hetzelfde te zijn als het gedrag op $+\infty$.

4) Een volledig verloop van een irrationale functie

We bespreken het volledige verloop van de irrationale functie $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x-2}$.

1) Domein: $dom\ f=\mathbb{R}$ **2) Continuïteit:** f is overal continu

3) Snijpunten met de assen en tekenverloop: f snijdt de y-as in $A\left(0,-\sqrt[3]{2}\right)$ ($f(0)=-\sqrt[3]{2}$)

f snijdt de x-as in $B(-1,0)$ en $C(2,0)$ ($f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x-2=0\overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} x=-1\vee x=2$)

x	$-\infty$		-1		2	$+\infty$
$f(x)$	-	-	0	-	0	+

4) Symmetrie: f is niet even, noch oneven (want $f(-x)\neq f(x)$ en $f(-x)\neq -f(x)$)

5) Asymptoten: f heeft een schuine asymptoot $s \leftrightarrow y = x$, want de formules van Cauchy geven:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x-2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1-3/x^2-2/x^3}}{\cancel{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x-2}+x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x-2}+x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x-2}{\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x-2}+x^2} = 0 \quad \left(\text{want } gr(T)=1 \text{ en } gr(N)=2\right)$$

6) Eerste afgeleide: $f'(x) = \dfrac{3x^2-3}{3\left(\sqrt[3]{x^3-3x-2}\right)^2} = \dfrac{x^2-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{2/3}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \cancel{x=-1} \vee x=1$ ($x=-1$ moeten we schrappen want dan is ook de noemer nul)

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	|	-	0	+	|	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗	↗	↗

Voor het maximum geldt: $f(-1)=0$

Voor het minimum geldt: $f(1) = -\sqrt[3]{4}$

$$\lim_{x\to-1} f'(x) = \lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{2/3}} = \lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^{4/3}(x-2)^{2/3}} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)}{(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}} \begin{array}{l}\nearrow \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f'(x)=+\infty\\ \searrow \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f'(x)=-\infty\end{array}$$

$$\lim_{x\to2} f'(x) = \lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{2/3}} = \lim_{x\to2}\frac{(x+1)}{(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}} = +\infty$$

In $(-1,0)$ heeft de grafiek van f dus een keerpunt, en in $(2,0)$ is er een verticale raaklijn.

7) Tweede afgeleide:

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^3-3x-2\right)^{2/3}-\left(x^2-1\right)\cdot\frac{2}{3}\left(x^3-3x-2\right)^{-1/3}\cdot\left(3x^2-3\right)}{\left(x^3-3x-2\right)^{4/3}}$$

$$= 2\cdot\frac{x\left(x^3-3x-2\right)-\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^3-3x-2\right)^{5/3}} = 2\cdot\frac{-x^2-2x-1}{\left(x^3-3x-2\right)^{5/3}} = -2\cdot\frac{(x+1)^2}{\left(x^3-3x-2\right)^{5/3}}$$

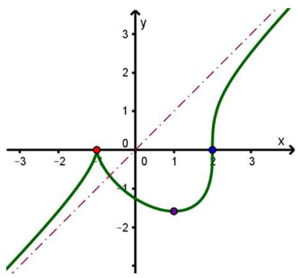
$f''(x)=0 \Rightarrow x+1=0 \Leftrightarrow \cancel{x=-1}$ ($x=-1$ moeten we schrappen want dan is ook de noemer nul)

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f''(x)$	+	|	+	|	-
$f(x)$	$\cup$	MAX	$\cup$	BP	$\cap$

Voor het buigpunt geldt: $f(2)=0$

8) Samenvattende tabel:

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	|	-	0	+	|	+
$f''(x)$	+	|	+	+	+	|	-
$f(x)$	↗	MAX (0)	↘	MIN $(-\sqrt[3]{4})$	↗	BP (0)	↗



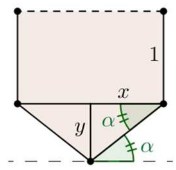
9) Beeld: $bld\ f = \mathbb{R}$ (dit volgt onmiddellijk uit de tabel)

10) Grafiek: naast tabel.

5) Belangrijke toepassing: extremumproblemen

Bij heel wat realistische problemen uit de exacte wetenschappen en economische wetenschappen wordt er gevraagd om iets te maximaliseren of minimaliseren (inhoud, temperatuur, winst, ...). Gaat het hierbij om afleidbare functies dan kunnen we de vorige stellingen gebruiken. We illustreren dit met twee voorbeelden:

Voorbeeld 1 (fysica): Een symmetrische dakgoot wordt gevormd door een ijzeren plaat van 4 dm breed te plooien in vier gelijke stukken zoals op de figuur hiernaast. De goot is vanboven open en heeft twee evenwijdige wanden. Hoe groot moet de hellingshoek α genomen worden opdat de inhoud van de goot maximaal zou zijn.



Met de conventies op de figuur geldt dat $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$.

De dwarsoppervlakte van de goot wordt dan gegeven door $S = 2x + \dfrac{2xy}{2} = 2x + x\sqrt{1-x^2} = f(x)$.

Afleiden geeft: $f'(x) = 2 + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2\sqrt{1-x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{1-x^2} + 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 4(1-x^2) = (2x^2-1)^2 \Leftrightarrow 4x^4 - 3 = 0 \overset{\boxed{x>0}}{\Rightarrow} x = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

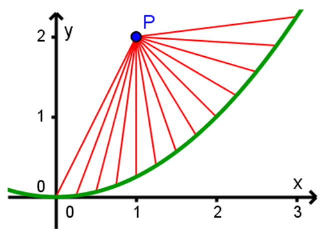
Het tekenverloop in het praktische domein $x \in]0,1[$ wordt dan gegeven door:

x	0		$\sqrt[4]{3/4}$		1
$f'(x)$	|	+	0	-	|
S		↗	MAX	↘	

De oppervlakte bereikt dus haar maximum als $x = \sqrt[4]{3/4}$.

Dan geldt: $\cos\alpha = \sqrt[4]{3/4} \Rightarrow \alpha \approx 21°28'15"$

Voorbeeld 2 (wiskunde): Hoeveel bedraagt de kortste afstand van het punt $P(1,2)$ tot de parabool $p \leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$.



Neem een variabel punt $Q(2x, x^2) \in p$, dan geldt voor de afstand d :

$d^2 = f(x) = (2x-1)^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 4x + 5$.

De afgeleide van deze functie is $f'(x) = 4x^3 - 4$, met als enige nulwaarde $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	MIN (2)	↗	

De afstand d is dus minimaal in het punt $(2,1)$ en hij bedraagt dan $d = \sqrt{2}$ (want $d^2 = 2$).

(Je kan ook de afstand $d = \sqrt{x^4 - 4x + 5}$ ipv d^2 als formule gebruiken, maar die afleiden is iets lastiger.)