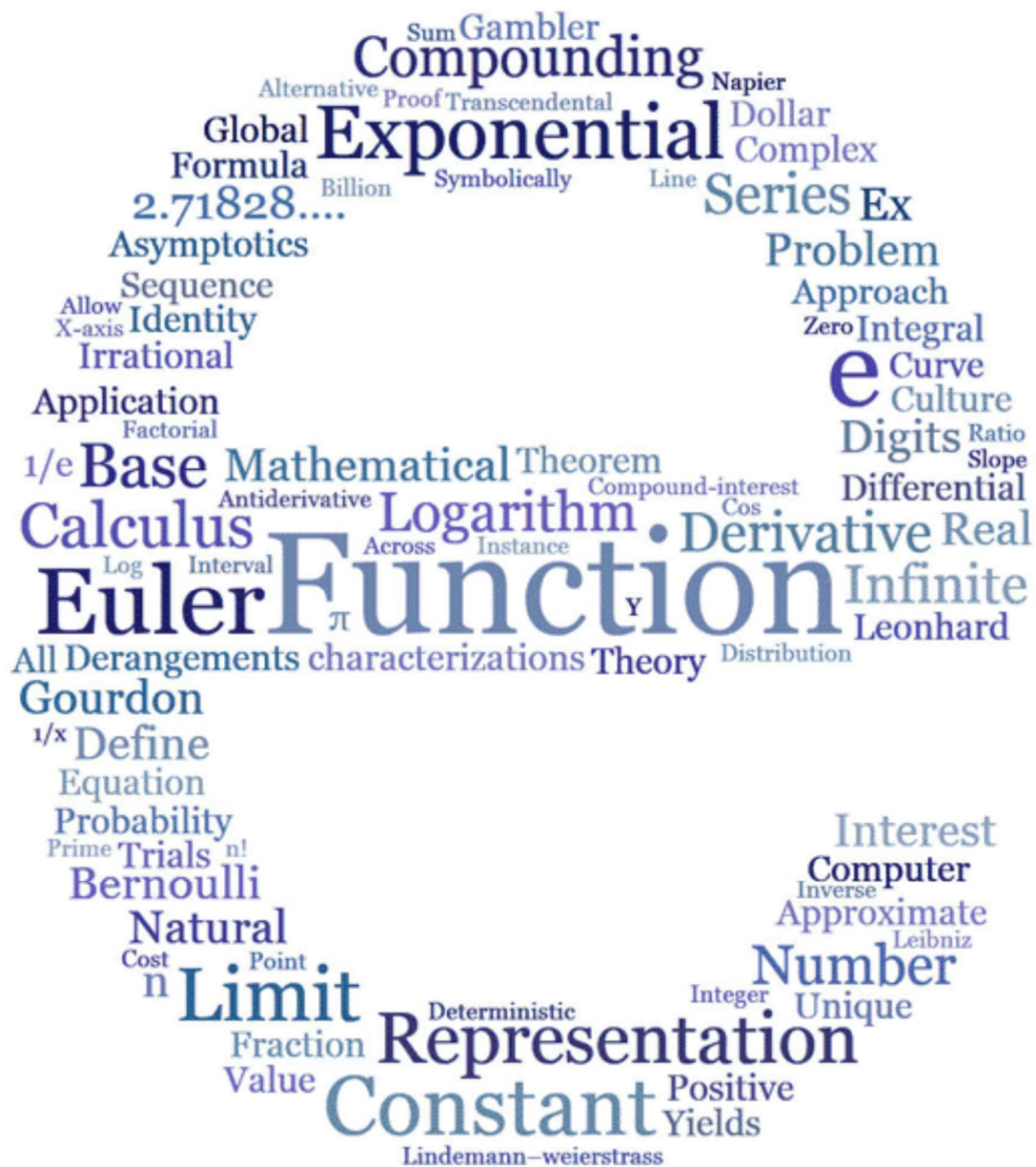


Verloop van exponentiële en logaritmische functies



1) Herhaling

a) Definitie en grafiek van exponentiële functies

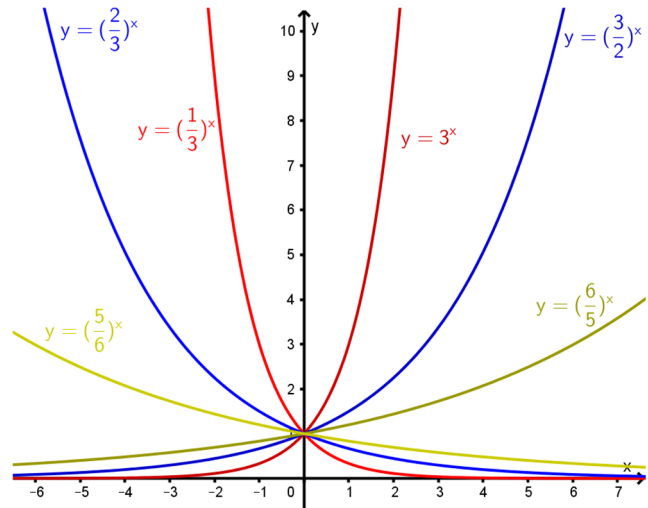
Een *exponentiële functie* is een functie met voorschrift $f(x) = a^x$, waarbij $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Deze functie wordt vaak genoteerd als $\exp_a$.

Hiernaast staan enkele grafieken van exponentiële functies getekend. We herhalen enkele belangrijke eigenschappen:

- Alle exponentiële functies hebben hetzelfde domein en hetzelfde beeld:
 $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : \text{dom } \exp_a = \mathbb{R}, \text{ bld } \exp_a = \mathbb{R}_0^+$
- Alle grafieken gaan door het punt $(0, 1)$.
- Als $a \in]0, 1[$ dan is $\exp_a$ een dalende functie, als $a > 1$ dan is $\exp_a$ een stijgende functie.
- Alle exponentiële functies hebben de x -as als horizontale asymptoot:

Als $a \in]0, 1[$, dan is $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, en

als $a > 1$, dan is $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.



b) Definitie en grafiek van logaritmische functies

We noemen c de a -logaritme van b als en slechts als geldt dat $a^c = b$.

In symbolen wordt deze definitie: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R} : {}^a\log b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

Rekenregels

Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels: $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \forall r \in \mathbb{R} :$

$$\textcircled{1} {}^a\log a^r = r$$

$$\textcircled{3} {}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y$$

$$\textcircled{5} {}^a\log x^r = r \cdot {}^a\log x$$

$$\textcircled{2} a^{{}^a\log x} = x$$

$$\textcircled{4} {}^a\log \frac{x}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y$$

$$\textcircled{6} {}^a\log x = \frac{{}^b\log x}{{}^b\log a}$$

Opm.: Stelling $\textcircled{5}$ heeft als onmiddellijk gevolg dat ook geldt dat: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : {}^a\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot {}^a\log x$.

Een *logaritmische functie* is een functie met voorschrift $f(x) = {}^a\log x$, waarbij $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Deze functie wordt ook vaak genoteerd als $\log_a$.

Het is onmiddellijk duidelijk dat $\log_a$ en $\exp_a$ elkaars inverse functie zijn (voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$).

Hiernaast staan enkele grafieken van logaritmische functies getekend. We herhalen enkele belangrijke eigenschappen:

- Alle logaritmische functies hebben hetzelfde domein en hetzelfde beeld:

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : \text{dom } \log_a = \mathbb{R}_0^+, \quad \text{bld } \log_a = \mathbb{R}$$

- Alle grafieken gaan door het punt $(1,0)$. In symbolen:

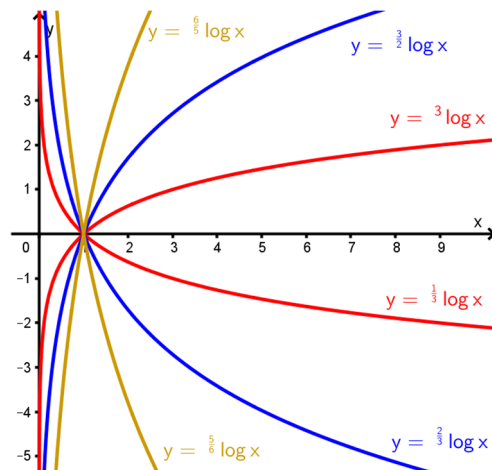
$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : (1,0) \in \log_a.$$

- Als $a \in]0,1[$ dan is $\log_a$ een dalende functie, als $a > 1$ dan is $\log_a$ een stijgende functie.

- Alle logaritmische functies hebben de y -as als verticale asymptoot:

$$\text{Als } a \in]0,1[, \text{ dan is } \lim_{x \rightarrow 0^+} {}^a\log x = +\infty, \text{ en}$$

$$\text{als } a > 1, \text{ dan is } \lim_{x \rightarrow 0^+} {}^a\log x = -\infty.$$



Briggse & natuurlijke logaritmen

Logaritmen met grondtal 10 noemen we Briggse logaritmen. Bij logaritmen met dit grondtal hoef je de 10 niet te schrijven (net zoals je de 2 bij een vierkantswortel ook niet schrijft).

Logaritmen met als grondtal het transcendente getal e ($e = 2,71828182846\dots$) noemen we natuurlijke logaritmen, of Neperiaanse logaritmen. Hier noteer je ook geen grondtal maar gebruik je ipv $\log$ het symbool $\ln$ (dit staat voor *logarithmus naturalis*). Dat het getal e zeer belangrijk is volgt uit de volgende paragraaf.

2) Afgeleiden van exponentiele en logaritmische functies

a) Afgeleiden van exponentiële functies

De definitie van afgeleide zegt dat $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Voor exponentiële functies (met $f(x) = a^x$) wordt dit: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Merk op dat $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, dit is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punt $P(0,1)$.

De limiet $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ bestaat dus en is enkel afhankelijk van de waarde van a .

We definiëren nu het getal e zó dat $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$. In dat geval zal dus gelden dat $D(e^x) = e^x$.

Uit de rekenregels van machten en logaritmen, en de kettingregel, volgt dan ook direct dat:

$$D(a^x) = D\left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right) = D\left(e^{x \cdot \ln a}\right) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Hieruit volgt dus ook meteen dat geldt: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$.

b) Afgeleiden van logaritmische functies

Steunend op het vorige en de kettingregel kunnen we nu ook heel eenvoudig de natuurlijke logaritme afleiden:

$$e^{\ln x} = x \Rightarrow D(e^{\ln x}) = D(x) \Leftrightarrow e^{\ln x} \cdot D(\ln x) = 1 \Leftrightarrow x \cdot D(\ln x) = 1 \Leftrightarrow D(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Voor logaritmische functies met een ander grondtal gebruiken we rekenregel ⑥:

$$D({}^a \log x) = D\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} D(\ln x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Belangrijke gevolgen (voor de cursus integraalrekening)

- $D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$, want als $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt $D(\ln|x|) = D(\ln x) = \frac{1}{x}$, en

$$\text{Als } x \in \mathbb{R}_0^- \text{ geldt } D(\ln|x|) = D(\ln(-x)) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

- $D\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right|\right) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}}{x + \sqrt{x^2 + k}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + k}}{\sqrt{x^2 + k}} = \frac{\sqrt{x^2 + k} + x}{(x + \sqrt{x^2 + k}) \cdot \sqrt{x^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$

c) Het getal e anders bekeken

Stelling: $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Bewijs: $D(\ln x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{stel } x=1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1$

Stellen we nu $\Delta x = \frac{1}{n}$, dan is $n = \frac{1}{\Delta x}$ en geldt dat $n \rightarrow +\infty$ (omdat $\Delta x \rightarrow 0$). We krijgen:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = 1 \Rightarrow \ln \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \square$$

(*: Dat $\lim$ en $\ln$ van plaats mogen wisselen ligt aan het feit dat $\ln$ een continue functie is.)

Opmerking: Het bewijs van deze stelling geldt ook voor de linkerlimiet $\Delta x \rightarrow 0^-$, dus ook $e = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Stel je $z = \frac{1}{n}$ (dus zal $z \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \pm\infty$) dan geldt dus ook dat $e = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}}$.

d) Afgeleiden van f^g

Als f en g beide afleidbare functies zijn, dan geldt voor de afgeleide van de functie f^g :

$$D(f^g) = D\left(\left(e^{\ln f}\right)^g\right) = D\left(e^{g \cdot \ln f}\right) = \underbrace{e^{g \cdot \ln f}}_{=f^g} \cdot \left(Dg \cdot \ln f + g \cdot \frac{Df}{f} \right) = f^g \cdot \ln f \cdot Dg + g \cdot f^{g-1} \cdot Df$$

Deze op het eerste zicht ingewikkelde formule kan eenvoudig onthouden worden door te beseffen dat de afgeleide bestaat uit twee termen. De eerste term bekom je door f^g af te leiden als exponentiële functie, de tweede term door af te leiden als machtsfunctie.

e) Een eenvoudige differentiaalvergelijking

Stelling: $f'(x) = k \cdot f(x)$, met $k \in \mathbb{R}_0 \Leftrightarrow f(x) = b \cdot e^{kx}$, met $b \in \mathbb{R}_0$.

Bewijs: " $\Leftarrow$ ": $f'(x) = D(b \cdot e^{kx}) = b \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot b \cdot e^{kx} = k \cdot f(x)$.

$$"\Rightarrow": D\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right) = \frac{e^{kx} \cdot f'(x) - f(x) \cdot k \cdot e^{kx}}{(e^{kx})^2} = \frac{e^{kx} \cdot k \cdot f(x) - f(x) \cdot k \cdot e^{kx}}{e^{2kx}} = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{kx}} = b \in \mathbb{R} \quad \square$$

3) De regel van de l'Hôpital

De regel van de l'Hôpital is een heel krachtige stelling die ons toelaat op eenvoudige wijze sommige limieten te berekenen. We bewijzen eerst een vereenvoudigde (afgezwakte) versie van de regel:

Stelling: Zijn $f(a) = g(a) = 0$, maar zo dat $g'(a) \neq 0$, met f en g afleidbaar in a , en $g'(a) \neq 0$, dan

geldt: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

$$\text{Bewijs: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \square$$

Deze stelling kent twee veelgebruikte uitbreidingen (we aanvaarden deze zonder bewijs):

Stelling: Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, of $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ en f en g zijn afleidbaar in een

$B_a \setminus \{a\}$, zodat $\forall x \in B_a \setminus \{a\} : g'(x) \neq 0$, dan geldt: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Deze stelling geldt ook als $x \rightarrow \pm\infty$)

Voorbeeld: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \cdot 3}{1} = 3$

Soms is het handig om de logaritme te nemen van een limiet, om het rekenwerk te vereenvoudigen:

Voorbeeld: om $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ te berekenen stel je $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = L \Leftrightarrow \ln \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \ln L \Leftrightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$.

Via een kleine kunstgreep kunnen we hierop de regel van l'Hôpital te kunnen toepassen:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$