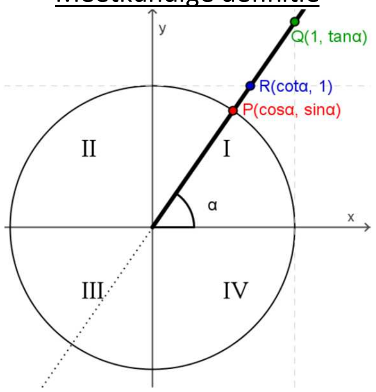
Verloop van goniometrische en cyclometrische functies

Meetkundige definitie



Definities

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Hoofdformules

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Bekende hoeken

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\notin\mathbb{R}$
$\cot\alpha$	$\notin\mathbb{R}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Verwante hoeken

Tegengestelde hoeken	*Supplementaire hoeken*
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$
Complementaire hoeken	*Anti-supplementaire hoeken*
$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha$	$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$
$\cot(\pi/2-\alpha) = \tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

Som en verschil formules

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$$

Verdubbelingsformules

$$\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Halveringsformules

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Formules van Simpson (product → som)

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

Formules van Simpson (som → product)

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

t-formules ($t = \tan\frac{x}{2}$)

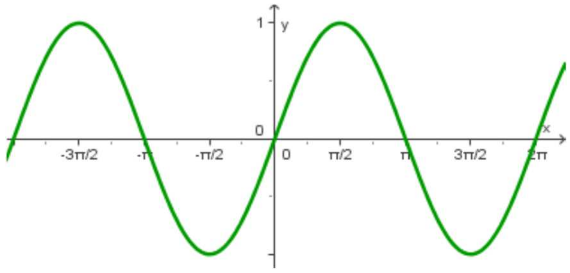
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

1) Herhaling

a) *De goniometrische functies*

De sinusfunctie

Dit is de functie $f(x) = \sin(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R}$

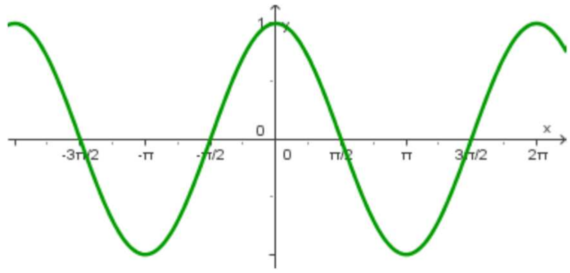
Beeld: $bld\ f = [-1,1]$

Periode: $P = 2\pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

De cosinusfunctie

Dit is de functie $f(x) = \cos(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R}$

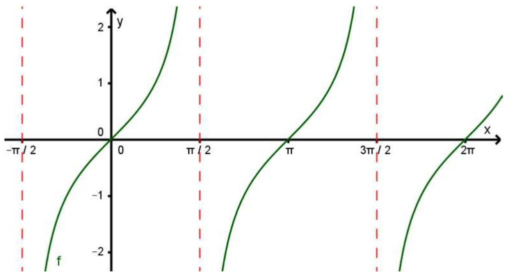
Beeld: $bld\ f = [-1,1]$

Periode: $P = 2\pi$

De grafiek is symmetrisch om de y-as.

De tangensfunctie

Dit is de functie $f(x) = \tan(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

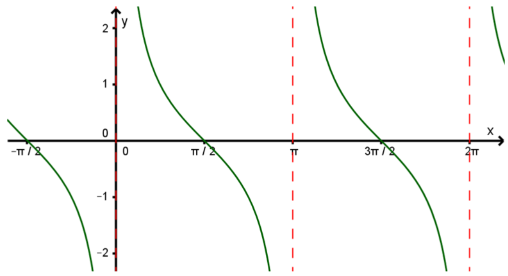
Beeld: $bld\ f = \mathbb{R}$

Periode: $P = \pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

De cotangensfunctie

Dit is de functie $f(x) = \cot(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Beeld: $bld\ f = \mathbb{R}$

Periode: $P = \pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

b) *Goniometrische vergelijkingen* ($k \in \mathbb{Z}$)

We herhalen hier snel even de drie types goniometrische basisvergelijkingen:

Sinusvergelijking:

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \vee \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Cosinusvergelijking:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \vee \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Tangensvergelijking:

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

c) *De cyclometrische functies*

De *cyclometrische functies* zijn de inverse functies van de goniometrische functies.

De boogsinusfunctie: $f(x) = \text{Bgsin } x$.

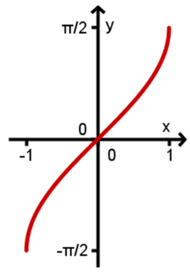
- $dom\ f = [-1,1]$
- $bld\ f = [-\pi/2, \pi/2]$
- Tekenverloop:

x		-1		0		1	
$f(x)$	/	-	-	0	+	+	/

- Stijgen en dalen:

x		-1		1	
$f(x)$	/	$\mid$	$\nearrow$	$\mid$	/

- Symmetrie: de functie is oneven (symmetrisch om de oorsprong)



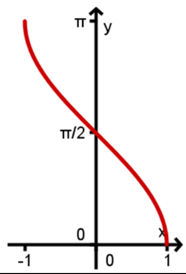
De boogcosinusfunctie: $f(x) = \text{Bgcos } x$.

- $dom\ f = [-1,1]$
- $bld\ f = [0, \pi]$
- Tekenverloop:

x		-1		0		1	
$f(x)$	/	+	+	+	+	0	/

- Stijgen en dalen:

x		-1		1	
$f(x)$	/	$\mid$	$\searrow$	$\mid$	/



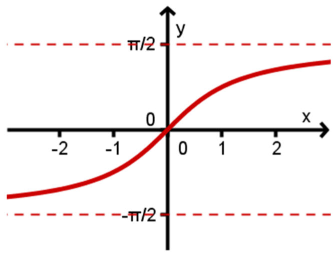
De boogtangensfunctie: $f(x) = \text{Bgtan } x$.

- $dom\ f = \mathbb{R}$
- $bld\ f =]-\pi/2, \pi/2[$
- Tekenverloop:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Stijgen en dalen:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	



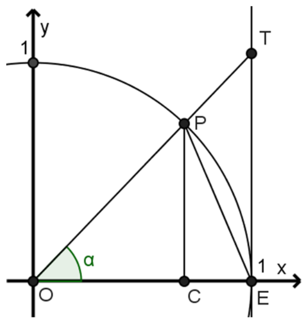
- Symmetrie: de functie is oneven (symmetrisch om de oorsprong).
- Asymptotisch gedrag: $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Bgtan } x = \pi/2$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{Bgtan } x = -\pi/2$

  De grafiek heeft dus twee horizontale asymptoten: $y = \pi/2$ en $y = -\pi/2$

2) Afgeleiden van de goniometrische functies

a) *Limieten van goniometrische functies*

In het bewijs van de afgeleide van een sinusfunctie komt een heel belangrijke limiet aan bod. Namelijk:



Stelling: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Bewijs: We bekijken eerst de rechterlimiet $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ >}} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ en stellen $\alpha \in]0, \pi/2[$.

Beschouw de figuur rechts. Voor een hoek α in het eerste kwadrant is het dan eenvoudig om in te zien dat de oppervlakte van driehoek ΔOEP kleiner is dan de oppervlakte van de cirkelsector bepaald door α die op zijn beurt weer kleiner is dan de oppervlakte van driehoek ΔOET. Dus geldt:

$$\forall \alpha \in]0, \pi/2[: \frac{\sin\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\tan\alpha}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Neem hierin de limiet $\alpha \to 0$ en er moet gelden dat $1 \le \lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ >}} \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} \le 1$, zodat inderdaad $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ >}} \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$.

Verander je hierbij α in $-\alpha$, dan krijg je: $\lim\limits_{\substack{-\alpha\to 0\\ >}} \dfrac{-\alpha}{\sin(-\alpha)} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ <}} \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$, dus ook de linkerlimiet is 1.

We mogen dus besluiten dat $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$, en dus ook dat $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$. □

b) ***Afgeleiden van goniometrische functies***

De afgeleide van de sinusfunctie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}$ van de sinusfunctie $f(x) = \sin x$, wordt gegeven door:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\cdot \sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}$$

$$= \lim_{\frac{x-a}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{2a}{2} = \cos a$$, of korter genoteerd: $D\sin x = \cos x$.

De afgeleiden van de andere goniometrische functies

Met behulp van de gekende rekenregels kunnen we nu ook de andere goniometrische functies afleiden:

- $D(\cos x) = D(\sin(\pi/2 - x)) = \cos(\pi/2 - x)\cdot(-1) = -\sin x$
- $D(\sec x) = D\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = -\dfrac{D\cos x}{\cos^2 x} = -\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$
- $D(\csc x) = D\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = -\dfrac{D\sin x}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$
- $D(\tan x) = D\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{\cos x\cdot D\sin x - \sin x \cdot D\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $D(\cot x) = D\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{\sin x\cdot D\cos x - \cos x \cdot D\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Voorbeeld 1: $D\left(\sqrt{\sin x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot D\sin x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

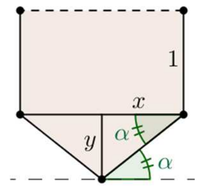
Voorbeeld 2: $D\left(x^4\cdot\sin x\right) = x^4\cdot D\sin x + \sin x\cdot Dx^4 = x^4\cos x + 4x^3\sin x$

Voorbeeld 3: Bereken de limiet $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$.

Zonder de regel van l'Hôpital is deze limiet heel moeilijk te berekenen, maar nu wordt dit kinderspel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x} \underset{0/0}{\overset{H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x} \underset{0/0}{\overset{H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x} \underset{0/0}{\overset{H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x} = 6$$

Voorbeeld 4: Een symmetrische dakgoot wordt gevormd door een ijzeren plaat van 4 dm breed te plooien in vier gelijke stukken zoals op de figuur hiernaast. De goot is vanboven open en heeft twee evenwijdige wanden. Hoe groot moet de hellingshoek α genomen worden opdat de inhoud van de goot maximaal zou zijn.



Op de figuur zien we dat $\cos\alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\alpha$ en $\sin\alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\alpha$.

De oppervlakte is dan $S = S_{\square} + S_{\triangledown} = 1.2x + \frac{2x.y}{2} = 2\cos\alpha + \cos\alpha.\sin\alpha$.

Het is deze functie die we gaan onderzoeken in het praktische domein $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Afleiden (naar α) geeft:

$$\frac{dS}{d\alpha} = -2\sin\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 - 2\sin\alpha - 2\sin^2\alpha$$

Om de nulpunten te zoeken lossen we de vierkantsvergelijking in $\sin\alpha$ op, met $\Delta = 12$:

$$-2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{2\pm\sqrt{12}}{-4} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \vee \cancel{\sin\alpha = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}}.$$

Stel $x_1 = \text{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, dan wordt het tekenverloop in het praktische domein $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:

x	0		x_1		$\pi/2$
$dS/d\alpha$	1	+	0	-	-3
S		↗	MAX	↘	

De functie bereikt dus haar maximum als $\alpha = x_1 \approx 21°28'15''$.

(Alle andere nulpunten liggen niet in het praktische domein)

3) Afgeleiden van de cyclometrische functies

a) *Afgeleide van een inverse functie*

Stel dat f afleidbaar is in $y = f(x)$ en dat $f'(y) \neq 0$, dan geldt voor de inverse functie f^{-1}:

$$x = f\left(f^{-1}(x)\right) \Rightarrow 1 = f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x) \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

b) *De afgeleiden van de cyclometrische functies*

De vorige stelling gebruiken geeft:

- $D(\text{Bgsin}\,x) = \frac{1}{\cos(\text{Bgsin}\,x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\text{Bgtan}\,x) = \cos^2(\text{Bgtan}\,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}$

Analoog kan je afleiden dat $D(\text{Bgcos}\,x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $D(\text{Bgcot}\,x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

4) Oefeningen

1. Bereken en vereenvoudig de afgeleide functies:

   a) $f(x) = \sec(3x)$ b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

   c) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$ d) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

   e) $x\sqrt{1-x^2} + \text{Bgsin}\, x$ f) $f(x) = \sqrt{\text{Bgcos}(x^2-1) + \pi/2}$

2. Bereken de volgende limieten:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x.\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin 4x}{\cos x}$

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\sin\dfrac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{\sin^2 x}$ f) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$

3. Bespreek het volledige verloop van volgende functies:

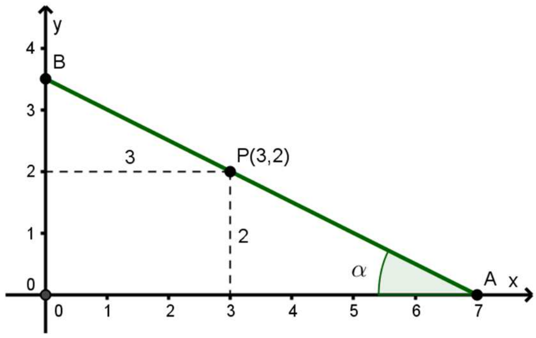
   a) $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$ b) $f(x) = 2x - 4\text{Bg}\tan x$

4. Voor welke waarde van $x \in [-2\pi, 0]$ vertoont de functie $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ een lokaal minimum? Wat is de functiewaarde van dit minimum?

5. A en B zijn punten op de positieve x-as en y-as, zodat punt $P(3,2)$ op het lijnstuk $[AB]$ ligt.
   α is de scherpe hoek die AB maakt met de x-as.

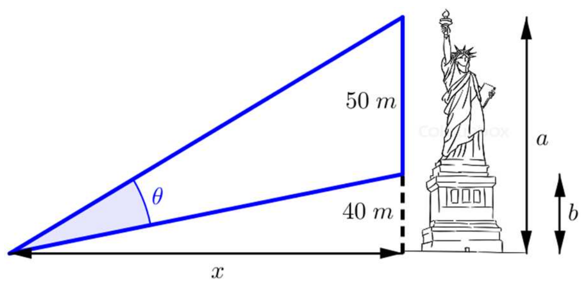
   Voor welke waarde van hoek α zal de lengte $|AB|$ minimaal zijn.

   Wat is deze minimale lengte?



6. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in $P\left(\dfrac{\pi}{6}, \ldots\right)$ aan de grafiek van $f(x) = \cos^2 x$.

7. De hoogte van een standbeeld is a, inclusief de hoogte van de sokkel b. Bevind je je op afstand x van het standbeeld (horizontaal gemeten), dan zie je het standbeeld zonder de sokkel onder een hoek θ (zie figuur).



   a) Bewijs dat $\theta = \text{Bgtan}\dfrac{a}{x} - \text{Bgtan}\dfrac{b}{x}$.

   b) Bewijs dat deze hoek θ maximaal is als $x = \sqrt{ab}$.

   c) Het vrijheidsbeeld is 50 m hoog en staat op een sokkel van 40 m hoog. Vanop welke afstand kan je best het vrijheidsbeeld bewonderen?

8. Beschouw een cirkel met straal r. Een rechte op afstand $r/6$ van het middelpunt verdeelt de cirkel in twee cirkelsegmenten. In het kleinste segment wordt een veranderlijke rechthoek ingeschreven. Bepaal de rechthoek met maximale oppervlakte.