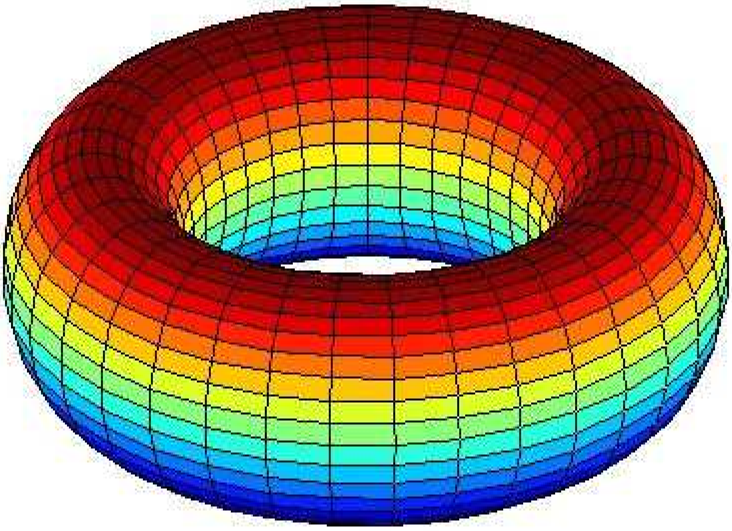
Toepassingen op Integraalrekening

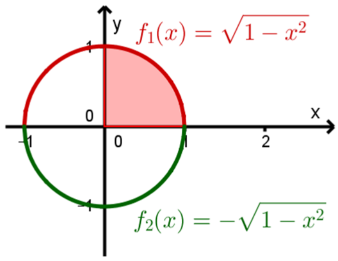


1) Oppervlaktes van vlakke figuren berekenen

De meest voor de hand liggende toepassing van integraalrekening is uiteraard de reden waarom ze is ingevoerd, namelijk het berekenen van oppervlaktes van vlakke figuren. We bekijken twee voorbeelden.

Cirkel, cirkelsector en cirkelsegment

We bereken de oppervlakte van een cirkel c met straal 1, en als middelpunt de oorsprong $O(0,0)$.



Uit de analytische meetkunde weten we dat $c \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

De vergelijking valt dus uiteen in twee functies $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Uit de figuur volgt duidelijk dat de oppervlakte van de cirkel gegeven wordt door $S = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{*}{=} \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C$$

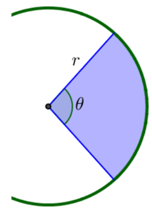
$$= \frac{1}{2}\text{Bgsin}\,x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

*: Stel $x = \sin t$ (met $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, dan is $dx = \cos t\,dt$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ en $t = \text{Bgsin}\,x$

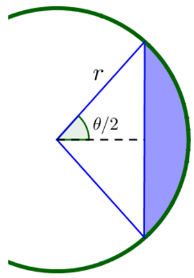
Dus is $S = \left[2\text{Bgsin}\,x + 2x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 2\text{Bgsin}\,1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$.

Een cirkel met straal r heeft een oppervlakte die r^2 keer groter is, zodat $S_{\bigcirc} = \pi r^2$.

De oppervlakte van een *cirkelsector* met straal r en middelpuntshoek θ wordt dan wegens de regel van drie gegeven door $S_{\text{sector}} = \frac{\theta}{2\pi}S_{\bigcirc} = \frac{\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$.



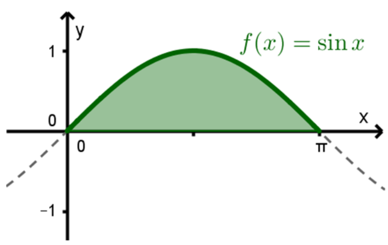
Om de oppervlakte van het *cirkelsegment* te vinden met straal r en middelpuntshoek θ moeten we van de cirkelsector de driehoek aftrekken met als basis $2r\sin\frac{\theta}{2}$ en hoogte $r\cos\frac{\theta}{2}$:



$$S_{\text{segment}} = S_{\text{sector}} - S_{\Delta} = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{2r\sin\frac{\theta}{2}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{r^2\sin\theta}{2} = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta).$$

Sinusboog

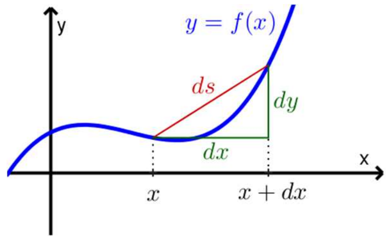
We berekenen de oppervlakte van een sinusboog van de sinusoïde $f(x) = \sin x$ tussen twee nulpunten:



$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

2) De booglengte van een kromme berekenen

In het interval $[x, x+dx]$ kan de booglengte ds van de grafiek van een (continue) functie f benaderd worden door $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, of dus nog $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ (zie figuur).



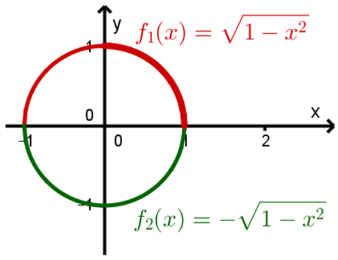
Is de functie f bovendien afleidbaar, dan kunnen we de limiet $dx \to 0$ nemen en wordt de booglengte van de grafiek in een interval $[a, b]$ gegeven door $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Cirkel en cirkelboog

We bereken de omtrek van een cirkel c met straal 1, en als middelpunt de oorsprong $O(0,0)$.

Uit de analytische meetkunde weten we dat $c \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

De vergelijking valt dus uiteen in twee functies $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$.



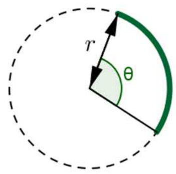
De lengte van de volledige cirkel is vier maal de booglengte van f_1 in het interval $[0,1]$.

De afgeleide is $f_1'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$, dus de omtrek van de cirkel wordt gegeven door:

$$L = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 4\cdot\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\left[\text{Bgsin } x\right]_0^1 = 4\cdot(\underbrace{\text{Bgsin } 1}_{=\pi/2} - \underbrace{\text{Bgsin } 0}_{=0}) = 2\pi$$

De omtrek van een cirkel met straal r is dan r keer groter, zodat $P_{\bigcirc} = 2\pi r$.

De lengte van een cirkelboog met straal r en middelpuntshoek θ wordt dan wegens de regel van drie gegeven door $L = \frac{\theta}{2\pi}P_{\bigcirc} = \frac{\theta}{2\pi}2\pi r = \theta r$.



3) Omwentelingslichamen

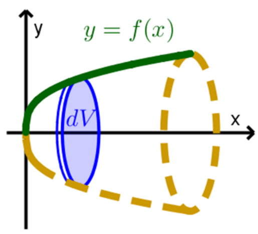
Een omwentelingslichaam is een ruimtefiguur die ontstaat door een vlakke kromme te wentelen om een rechte. Met behulp van integralen kunnen we zowel de inhoud als de manteloppervlakte van omwentelingslichamen berekenen.

a) *Inhoud van een omwentelingslichaam*

Stel dat we de inhoud willen berekenen van het omwentelingslichaam dat we verkrijgen door de functie f te wentelen om de x-as.

In het interval $[x, x+dx]$ kunnen we het volume dV dat we zo verkrijgen benaderen door de inhoud van een cilinder met dikte dx en straal $f(x)$.

We krijgen dan $dV = \pi\left(f(x)\right)^2 dx$.

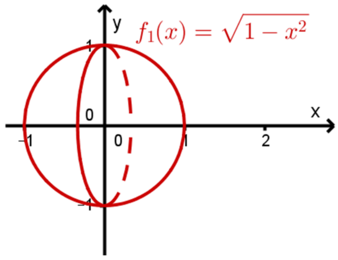


Nemen we hierin de limiet $dx \to 0$ dan wordt de inhoud van het omwentelingslichaam, verkregen door de grafiek van f in het interval $[a,b]$ te wentelen om de x-as gegeven door

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Bol

We bereken de inhoud van de bol met straal 1, die we verkrijgen door de grafiek van de functie $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ in haar domein te wentelen om de x-as.



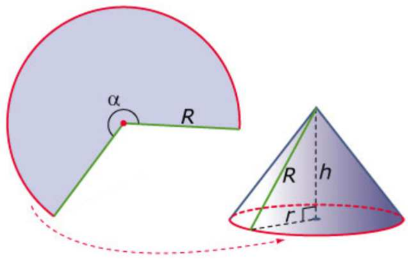
$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi .$$

Het volume van een bol met straal r is dan r^3 keer zo groot, zodat $V_{bol} = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) ***De manteloppervlakte van een omwentelingslichaam***

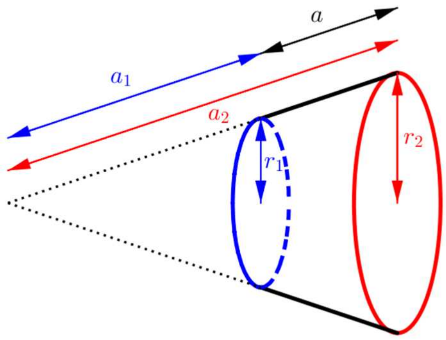
Manteloppervlakte van een afgeknotte kegel

Op de figuur hiernaast is duidelijk te zien dat het manteloppervlak van een kegel met apothema R en straal r kan ontwikkeld worden tot een cirkelsector met straal R.
Het is duidelijk dat de lengte van de cirkelboog $R\alpha$ moet gelijk zijn aan de omtrek van het grondvlak van de kegel $2\pi r$. Dus moet $\alpha = \frac{2\pi r}{R}$, zodat de oppervlakte van de cirkelsector



(en dus ook de manteloppervlakte van de kegel) gelijk is aan: $S_\nabla = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{2\pi r}{2R}R^2 = \pi r R$.

Beschouw nu een afgeknotte kegel zoals op de figuur hiernaast, met stralen r_1 en r_2 en bijhorende apothemas a_1 en a_2 (We noemen $a = a_2 - a_1$).
De manteloppervlakte van de afgeknotte kegel wordt dan gegeven door $S = \pi r_2 a_2 - \pi r_1 a_1 = \pi\left(r_2 a_2 - r_1 a_1\right)$.
Uit de figuur volgt ook (wegens gelijkvormige driehoeken) dat: $\frac{a_2}{r_2} = \frac{a_1}{r_1} \Leftrightarrow a_2 r_1 = a_1 r_2$.



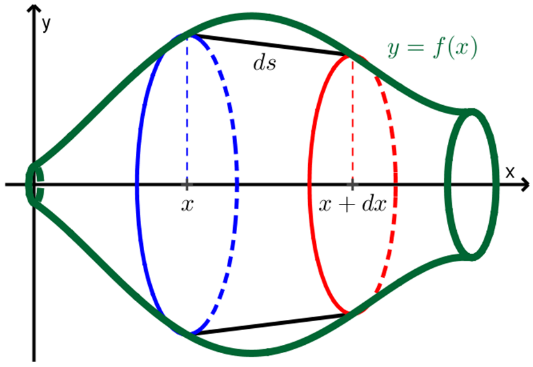
Zo wordt $S = \pi\left(r_2 a_2 - r_1 a_1\right) = \pi\left(r_2\left(a + a_1\right) - r_1\left(a_2 - a\right)\right) = \pi\left(r_2 a + \cancel{r_2 a_1} - \cancel{r_1 a_2} + r_1 a\right) = \pi\left(r_1 + r_2\right)a$.

Manteloppervlakte van een omwentelingslichaam

We zijn nu voldoende gewapend om de manteloppervlakte van een omwentelingslichaam te berekenen.

Stel dat we de manteloppervlakte willen berekenen van het omwentelingslichaam dat we verkrijgen door de functie f te wentelen om de x-as.

In het interval $[x, x+dx]$ kunnen we de oppervlakte dS die we zo verkrijgen benaderen door de manteloppervlakte van een afgeknotte kegel met apothema ds en stralen $f(x)$ en $f(x+dx)$.



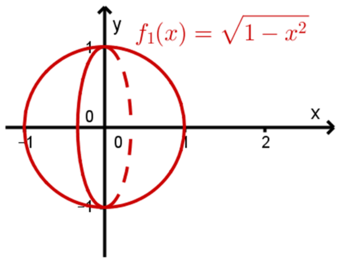
Gebruiken we de formule die we net gezien hebben dan wordt dit: $dS = \pi\big(f(x) + f(x+dx)\big)ds$.

Nemen we hierin de limiet $dx \to 0$ dan wordt de manteloppervlakte van het omwentelingslichaam, verkregen door de grafiek van f in het interval $[a,b]$ te wentelen om de x-as gegeven door

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx .$$

Bol

We bereken de oppervlakte van de bol met straal 1, die we verkrijgen door de grafiek van de functie $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ in haar domein te wentelen om de x-as.



$$S = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-1}^{1}dx = 2\pi\,[x]_{-1}^{1} = 4\pi .$$

De oppervlakte van een bol met straal r is dan r^2 keer groter, zodat $S_{bol} = 4\pi r^2$.