

Formularium ruimtemeetkunde

Midden en zwaartepunt

Het midden van $[P_1P_2]$, met $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$, is $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Het zwaartepunt van $\Delta P_1P_2P_3$, met $P_3(x_3, y_3, z_3)$ is $Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+z_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

Vergelijking van een rechte

Vergelijking van een rechte r met richtingsvector $\vec{R}(a, b, c)$ die door $P_1(x_1, y_1, z_1)$ gaat:

- Vectorvergelijking: $r \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot \vec{R}$, met $k \in \mathbb{R}$.
- Parametervergelijking: $r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a \\ y = y_1 + k \cdot b \\ z = z_1 + k \cdot c \end{cases}$, met $k \in \mathbb{R}$.
- Cartesische vergelijkingen: $r \leftrightarrow \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ (op voorwaarde dat $abc \neq 0$)

Als bijvoorbeeld $a = 0$ dan geldt: $r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \end{cases}$

Als bijvoorbeeld $a = b = 0$ dan geldt: $r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$

Een rechte wordt dus altijd voorgesteld door een stelsel van twee cartesische vergelijkingen. In oefeningen volstaat het om een rechte te definiëren als snijlijn van twee vlakken die aan bepaalde voorwaarden voldoen.

Richtingsvectoren

- Als twee punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ van een rechte gegeven zijn dan kan je de vector $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ gebruiken als richtingsvector.
- Twee rechten r_1 en r_2 met richtingsvectoren respectievelijk $\vec{R}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{R}_2(a_2, b_2, c_2)$ zijn evenwijdig als en slechts als de richtingsvectoren evenredig zijn, dus $r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{R}_1 \sim \vec{R}_2$.
- Als een rechte gegeven is als snijlijn van twee vlakken $s \leftrightarrow \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{cases}$, dan is een richtings-

vector $\vec{R}\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\right) = \vec{R}(v_1w_2 - v_2w_1, -(u_1w_2 - u_2w_1), u_1v_2 - u_2v_1)$.

Vergelijking van een vlak

Vergelijking van een vlak α met richtingsvectoren $\vec{R}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{R}_2(a_2, b_2, c_2)$ dat door $P_1(x_1, y_1, z_1)$ gaat:

- Vectorvergelijking: $\alpha \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k \cdot \vec{R}_1 + m \cdot \vec{R}_2$, met $k, m \in \mathbb{R}$.

- Parametervergelijking: $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k \cdot a_1 + m \cdot a_2 \\ y = y_1 + k \cdot b_1 + m \cdot b_2 \\ z = z_1 + k \cdot c_1 + m \cdot c_2 \end{cases}$, met $k, m \in \mathbb{R}$.
- Cartesische vergelijking: $\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

Uitgewerkt geeft dit: $\alpha \leftrightarrow (x - x_1) \cdot (b_1 c_2 - c_1 b_2) - (y - y_1) \cdot (a_1 c_2 - c_1 a_2) + (z - z_1) \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2)$.

Richtingsvectoren

- Als twee punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ van een vlak gegeven zijn dan kan je de vector $\overrightarrow{P_1 P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ gebruiken als richtingsvector.
- Twee vlakken $\alpha_1 \leftrightarrow u_1 x + v_1 y + w_1 z + t_1 = 0$ en $\alpha_2 \leftrightarrow u_2 x + v_2 y + w_2 z + t_2 = 0$ zijn evenwijdig als en slechts als hun normaalvectoren $\vec{n}_{\alpha_1}(u_1, v_1, w_1)$ en $\vec{n}_{\alpha_2}(u_2, v_2, w_2)$ evenredig zijn, dus $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\alpha_1} \sim \vec{n}_{\alpha_2}$.
- Een rechte r met richtingsvector $\vec{R}(a, b, c)$ zal evenwijdig zijn met een vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ als en slechts als de richtingsvector in het vectorvlak ligt, dus $r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{R} \in \alpha_0 \Leftrightarrow ua + vb + wc = 0$.

(Je kan dit ook herformuleren met behulp van het scalair product: $r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{R} \perp \vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \vec{R} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$.)

Vergelijking van een vlak als de assegmenten gegeven zijn

Als $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ en $C(0, 0, c)$, met $abc \neq 0$, dan geldt $vl(ABC) \leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vergelijking van een vlakkenwaaier

Alle vlakken γ die de rechte $s \leftrightarrow \begin{cases} u_1 x + v_1 y + w_1 z + t_1 = 0 \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z + t_2 = 0 \end{cases}$ bevatten kunnen we schrijven als:

$$k(u_1 x + v_1 y + w_1 z + t_1) + m(u_2 x + v_2 y + w_2 z + t_2) = 0, \text{ met } k, m \in \mathbb{R}, \text{ niet beide } 0.$$

Evenwijdige vlakken

Voor een vlak β dat door $P_1(x_1, y_1, z_1)$ gaat en evenwijdig is aan $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ geldt:

$$\beta \leftrightarrow u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) = 0$$

Scalair product – loodrechte stand

- Definitie scalair product: $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ en $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$
- De norm (lengte) van een vector $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$: $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
- Eigenschap: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$
- Hoofdeigenschap loodrechte stand: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$
- Normaalvector: de vector $\vec{n}_\alpha(u, v, w)$ staat loodrecht op vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$
- Loodrechte stand van twee rechten r_1 en r_2 met richtingsvectoren $\vec{R}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{R}_2(a_2, b_2, c_2)$:

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

- Loodrechte stand van een rechte r met richtingsvector $\vec{R}(a,b,c)$ en een vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$:

$$r \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{R}(a,b,c) \sim \vec{n}_\alpha(u,v,w)$$

- Loodrechte stand van twee vlakken $\alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$:

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0$$

- De loodlijn l op een vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ en door een punt $P(x_1, y_1, z_1)$:

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = k \cdot u + x_1 \\ y = k \cdot v + y_1 \\ z = k \cdot w + z_1 \end{cases} \quad (\text{gebruik de normaalvector } \vec{n}_\alpha(u,v,w) \text{ als richtingsvector van } l)$$

- Het loodvlak λ op een rechte met richtingsvector $\vec{R}(a,b,c)$ en door een punt $P(x_1, y_1, z_1)$:

$$\lambda \leftrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad (\text{gebruik de richtingsvector } \vec{R}(a,b,c) \text{ als normaalvector van } \lambda)$$

Afstanden

- Afstand tussen $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P_2(x_2, y_2, z_2)$: $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- Afstand van $P(x_1, y_1, z_1)$ tot $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$: $d(\alpha, P) = \frac{|ux_1 + vy_1 + wz_1 + t|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$
- De afstand van een punt P tot een rechte r is de afstand van P tot het snijpunt P' van r met het loodvlak op r door P .

Hoeken

De hoek tussen twee rechten r_1 en r_2 met richtingsvectoren $\vec{R}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{R}_2(a_2, b_2, c_2)$:

$$\cos(\widehat{r_1, r_2}) = \frac{|\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2|}{\|\vec{R}_1\| \cdot \|\vec{R}_2\|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

De hoek tussen twee vlakken $\alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$:

$$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2|}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \cdot \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}$$

De hoek tussen vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ en rechte r met richtingsvector $\vec{R}_r(a,b,c)$:

$$\sin(\widehat{\alpha, r}) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{R}_r|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{R}_r\|} = \frac{|ua + vb + wc|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bol

Een bol $\mathcal{B}$ met middelpunt $M(x_0, y_0, z_0)$ en straal r :

$$\mathcal{B} \leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Omgekeerd, voor een bol $\mathcal{B} \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ geldt dat:

$$M_{\mathcal{B}}(-a, -b, -c) \text{ en } r_{\mathcal{B}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$