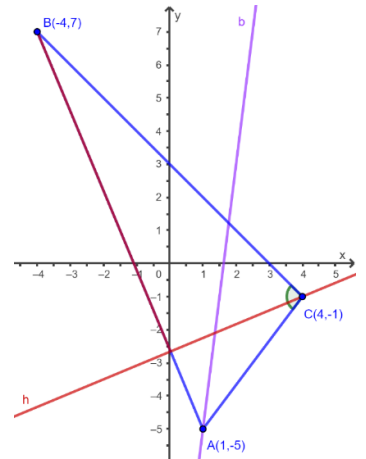




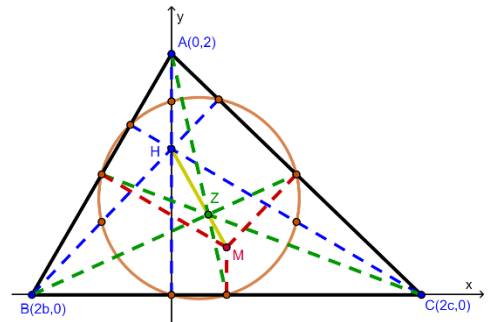
## Extra oefeningen analytische meetkunde

### 1) Inleiding

- ★ Gegeven is  $\triangle ABC$ , met  $A(1, -5)$ ,  $B(-4, 7)$  en  $C(4, -1)$ .
  - Bepaal, tot op 1 seconde nauwkeurig, de grootte van hoek  $\hat{C}$ .
  - Bepaal de oppervlakte van  $\triangle ABC$ .
  - Bepaal de afstand tussen punt  $B$  en de hoogtelijn  $h$  uit punt  $C$ .
  - Bepaal het snijpunt van de binnenbissectrice  $b$  van hoek  $\hat{A}$  met de  $y$ -as.



- ★★★ Kies het assenstelsel zoals op de figuur, en bewijs analytisch dat in elke driehoek de volgende stellingen gelden:
  - De drie zwaartelijnen in een driehoek snijden in het zwaartepunt  $Z$ .
  - De drie hoogtelijnen in een driehoek snijden in het hoogtepunt  $H$ .
  - De drie middelloodlijnen in een driehoek snijden elkaar in het middelpunt  $M$  van de omschreven cirkel.
  - De punten  $H$ ,  $Z$  en  $M$  liggen op één rechte: de zogenaamde *rechte van Euler*.
  - $2 \cdot |ZM| = |HZ|$
  - De voetpunten van de hoogtelijnen, de middens van de zijden en de middens van de lijnstukken die het hoogtepunt met het corresponderende hoekpunt verbinden liggen op één cirkel: de zogenaamde *negepunts-cirkel van Feuerbach*.



### 2) Kegelsneden (in basisvorm)

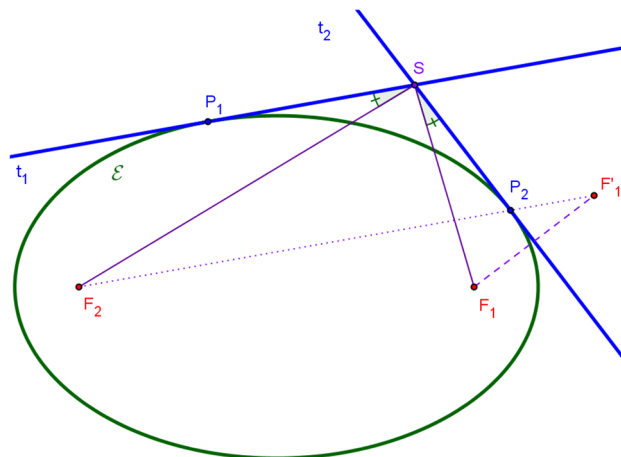
#### a) De parabool

- ★★★ Op een parabool  $\mathcal{P}$  met top  $O$ , as  $s$  en brandpunt  $F$  beschouw je een punt  $D \neq O$ . De rechte  $DO$  snijdt de richtlijn van  $\mathcal{P}$  in  $A$ . De rechte  $DF$  snijdt  $\mathcal{P}$  een tweede keer in  $B$ . Bewijs dat  $AB \parallel s$ .
- ★★★ Door het brandpunt  $F$  van een parabool  $\mathcal{P}$  brengen we een rechte  $r$  aan loodrecht op de as van  $\mathcal{P}$  die  $\mathcal{P}$  snijdt in  $A$  en  $B$ . Op  $r$  nemen we een willekeurig punt  $C$ . De loodrechte projecties van  $C$  op de raaklijnen aan  $\mathcal{P}$  in  $A$  en  $B$  noemen we  $A'$  en  $B'$ . Bewijs dat  $A'B'$  een raaklijn is aan de parabool. Waar ligt het raakpunt?
- ★★ Bepaal de (coördinaten van de) punten  $A$  en  $B$  op  $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$  zodat deze punten samen met de top  $O$  een gelijkzijdige driehoek vormen.

6. ★★★ Als  $P(x_1, y_1) \in \mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$  dan hebben we bewezen dat  $t \leftrightarrow y \cdot y_1 = p(x + x_1)$  de vergelijking is van de raaklijn in  $P$  aan  $\mathcal{P}$ .  
Bewijs dat, als  $P$  buiten de parabool  $\mathcal{P}$  ligt, de rechte  $t$  de rechte is die de punten verbindt waar de raaklijnen vanuit  $P$  de parabool  $\mathcal{P}$  raken. We noemen  $t$  in dat geval de poollijn van  $P$ .
7. ★★★ Een rechte  $r$  snijdt een parabool  $\mathcal{P}$  (met brandpunt  $F$ , richtlijn  $d$  en as  $s$ ) in twee punten  $A$  en  $B$ . Noem  $M$  het midden van  $[AB]$ . Bewijs dat de rechte evenwijdig aan  $s$  door  $M$  concurrent is met  $d$  en de loodlijn op  $r$  door  $F$ .
8. ★★★ Vier verschillende punten van de parabool  $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$  zijn concyclisch (liggen op één cirkel). Bewijs dat de som van de  $y$ -coördinaten van die 4 punten nul zijn.
9. De drie zijden van een driehoek raken aan een parabool  $\mathcal{P}$ .
- ★★★ Bewijs dat het hoogtepunt van de driehoek op de richtlijn van de parabool ligt.
  - ★★★★ Bewijs dat het brandpunt van  $\mathcal{P}$  op de omgeschreven cirkel van de driehoek ligt.

### b) De ellips

10. ★★★ Op een ellips  $\mathcal{E}$  neem je twee vaste punten  $P$  en  $Q$  en een veranderlijk punt  $R$ . De middelloodlijnen van  $[PR]$  en  $[QR]$  snijden de grote as van  $\mathcal{E}$  in respectievelijk  $U$  en  $V$ . Bewijs dat de vector  $\overline{UV}$  een constante vector is (dus onafhankelijk van de keuze van  $R$ ).
11. ★★ Een ellips (betrokken op haar assen) raakt de rechten  $t_1 \leftrightarrow 5x + 2y + 9 = 0$  en  $t_2 \leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$ .  
Stel haar vergelijking op.
12. ★★★ Het punt  $P(x_1, y_1)$  ligt op de ellips  $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , met brandpunten  $F_1$  en  $F_2$ .  
Bewijs dat  $|PF_1| = a - \frac{c}{a}x_1$  en  $|PF_2| = a + \frac{c}{a}x_1$  (of omgekeerd).
13. ★★★ Op een ellips  $\mathcal{E}$  liggen twee (verschillende) punten  $P_1$  en  $P_2$  waarin de raaklijnen aan  $\mathcal{E}$  elkaar snijden in  $T$ . Bewijs dat  $T$  collineair is met het midden  $M$  van  $[P_1P_2]$  en het middelpunt van  $\mathcal{E}$ .
14. Gegeven is een ellips  $\mathcal{E}$  met brandpunten  $F_1$  en  $F_2$  en twee willekeurig raaklijnen  $t_1$  en  $t_2$  in de punten  $P_1, P_2 \in \mathcal{E}$  die elkaar snijden in  $S$ .
- ★ Noem  $F_1'$  het spiegelbeeld van  $F_1$  om de raaklijn  $t_2$ .  
Bewijs dat  $F_2, P_2$  en  $F_1'$  collineair zijn, en dat  $|F_2F_1'| = 2a$  (= de lengte van de grote as van de ellips).
  - ★★★★ Bewijs dat  $\widehat{P_2SF_1} = \widehat{P_1SF_2}$ .



15. ★★ Bewijs volgende stellingen **zonder** gebruik te maken van analytische meetkunde:
- Het beeld van een brandpunt van een ellips door spiegeling ten opzichte van een willekeurige raaklijn ligt op de cirkel die het andere brandpunt als middelpunt heeft en als straal de lengte van de grote as van de ellips. We noemen deze cirkel *een richtcirkel* van de ellips.
  - Je vormt een lijnstuk door een punt van een richtcirkel van een ellips te verbinden met het andere brandpunt. Bewijs dat de middelloodlijn van dit lijnstuk een raaklijn is aan de ellips.
  - Gebruik het voorgaande om de raaklijnen te **construeren** aan de ellips  $\mathcal{E}$  die evenwijdig zijn met de gegeven rechte  $r$ .
16. ★★★★★ Op een ellips  $\mathcal{E}$  met brandpunten  $F$  en  $F'$  neem je een willekeurig punt  $P$ . Noem  $t$  en  $n$  respectievelijk de raaklijn en de normaal aan de ellips in punt  $P$ . Noem  $G$  en  $G'$  de loodrechte projecties van respectievelijk  $F$  en  $F'$  op  $t$ . Bewijs dat de rechten  $FG'$ ,  $F'G$  en  $n$  concurrent zijn.

### c) De hyperbool

17. ★★ Gegeven is de hyperbool  $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Bepaal, indien mogelijk, op  $\mathcal{H}$  vier punten die de hoekpunten zijn van een vierkant met zijden die evenwijdig zijn met de assen van  $\mathcal{H}$ . Is dit altijd mogelijk?
18. ★★ Gegeven is de hyperbool  $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Neem de punten  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$  en een willekeurig punt  $P \in \mathcal{H}$ . Bewijs dat het verschil van de kwadraten van de oppervlaktes van  $\triangle OAP$  en  $\triangle OBP$  een constante is.
19. ★★ Op een hyperbool  $\mathcal{H}$  neem je een veranderlijk punt  $P$ . De rechten door  $P$  evenwijdig met de asymptoten vormen samen met de asymptoten een parallellogram. Bewijs dat de oppervlakte van dit parallellogram altijd gelijk is aan een achtste van de oppervlakte van de assenrechthoek.
20. ★★ Op een gelijkzijdige hyperbool  $\mathcal{H}$  met toppen  $T$  en  $T'$  neem je een willekeurig punt  $P$ . Noem  $P'$  het spiegelbeeld van  $P$  om de as  $TT'$ . Bewijs dat  $T$  het hoogtepunt is van de driehoek  $\triangle PP'T'$ .
21. De punten  $S_1$  en  $S_2$  zijn de snijpunten van de raaklijn aan een hyperbool  $\mathcal{H}$  in een willekeurig punt  $P$  met de asymptoten van  $\mathcal{H}$ .
- ★★ Bewijs dat  $P$  het midden is van  $[S_1S_2]$ .
  - ★★★★ Bewijs dat de punten  $S_1$  en  $S_2$  concyclisch zijn met de brandpunten van  $\mathcal{H}$ .

### 3) Meetkundige plaatsen

22. ★★ Een veranderlijke rechte  $d$  met vaste richting snijdt de assen van een georthonormeed assenstelsel met oorsprong  $O$  in  $A$  en  $B$ . Bepaal de meetkundige plaats van het middelpunt van de omschreven cirkel van  $\triangle OAB$ .
23. ★ Gegeven zijn twee punten  $A(a, 0)$  en  $B(0, b)$ , met  $a, b \in \mathbb{R}_0$  zodanig dat  $a \cdot b = 1$ . Bepaal de meetkundige plaats van de middens  $M$  van de lijnstukken  $[AB]$ .

24. ★★ Uit een veranderlijk punt  $D$  van een parabool  $\mathcal{P}$  met top  $O$  laat men een loodlijn neer op de as van  $\mathcal{P}$ . Door het voetpunt trekt men de rechte  $a$  evenwijdig met  $OD$  en door  $D$  trekt men de rechte  $b$  evenwijdig met de as van de parabool. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van  $a$  en  $b$ .
25. ★★ Neem een veranderlijk punt  $D$  op een ellips  $\mathcal{E}$  met  $A$  een top op de hoofdas en als symmetriemiddelpunt  $O$ . Noem  $D'$  de loodrechte projectie van  $D$  op de nevenas van  $\mathcal{E}$ . Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van  $OD$  en  $AD'$ .
26. ★★ Op een ellips  $\mathcal{E}$  met lengten van de halve assen 3 en 6 neem je een veranderlijk punt  $D$ . De normaal  $n$  in  $D$  snijdt de hoofdas van  $\mathcal{E}$  in  $E$ . Bepaal de meetkundige plaats van punt  $P \in n$  waarvoor geldt dat  $\frac{\overline{DP}}{EP} = -2$ .

#### 4) Homogene coördinaten – het projectieve vlak

27. ★ Gegeven zijn de punten  $P_1(3,1,2)$  en  $P_2(-2,4,1)$  via hun homogene coördinaten.
- Geef een stelsel parametervergelijkingen van de rechte  $P_1P_2$  met behulp van twee homogene parameters.
  - Bepaal het oneigenlijke punt op de rechte  $P_1P_2$ .
  - Bepaal de coördinaat van het midden van  $P_1P_2$ .
28. ★★ Gegeven is de rechtenbundel met als basisexemplaren  $d_1 \leftrightarrow 2x - y + 3z = 0$  en  $d_2 \leftrightarrow x + 3y - z = 0$ .
- Geef de algemene homogene vergelijking van deze rechtenbundel.
  - Bepaal de vergelijking van de rechte uit deze bundel die door het oneigenlijke punt  $Q(1, -2, 0)$  gaat.
  - Bepaal de vergelijking van de rechte uit deze bundel die loodrecht staat op  $d_3 \leftrightarrow 3x - 4y + 5z = 0$ .
  - Bestaat er een rechte in deze bundel die samenvalt met de oneigenlijke rechte? Bewijs je antwoord.
29. ★★ Bepaal de homogene vergelijking van de volgende krommen  $\mathcal{K}$  waarvan je de cartesische vergelijking krijgt. Bepaal vervolgens een stel homogene coördinaten van de punten op oneindig van  $\mathcal{K}$  en geef aan hoeveel reële punten op oneindig de kromme bezit.
- $\mathcal{K} \leftrightarrow 9x^2 + 16y^2 = 144$
  - $\mathcal{K} \leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 3y = 0$
  - $\mathcal{K} \leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + y = 0$
  - $\mathcal{K} \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

#### 5) Imaginaire punten en rechten

30. ★★ Gegeven is de imaginaire rechte met homogene vergelijking  $d \leftrightarrow (2+i)x + (1-3i)y + (5i-1)z = 0$
- Elk complex getal kan gesplitst worden in een reëel en imaginair deel. Splits de vergelijking van  $d$  in de vorm  $d_1 + i \cdot d_2 = 0$ , waarbij  $d_1$  en  $d_2$  reële rechten zijn.
  - Bepaal (door a te gebruiken) het unieke reële punt dat op de imaginaire rechte  $d$  gelegen is.
  - Kan je op deze manier ook bewijzen dat op elke imaginaire rechte één reëel punt ligt?

31. ★★ We beschouwen de punten  $P_1(1+2i, 3-i, 2)$  en  $P_2(1-2i, 3+i, 2)$ .
- Toon aan dat  $P_1$  en  $P_2$  toegevoegd imaginaire punten zijn.
  - Stel de homogene vergelijking op van de rechte  $l = P_1P_2$ . Toon aan dat dit een reële rechte is.
32. ★★ Gegeven is de parabool  $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 4x$  en de rechte  $d \leftrightarrow y = 2ix$ .
- Bepaal de algebraïsche coördinaten van de snijpunten van  $d$  met  $\mathcal{P}$ .
  - Zijn deze snijpunten reëel, imaginair of toegevoegd imaginair?
  - Neem nu een willekeurige imaginaire rechte  $a$  die door de oorsprong  $O(0,0)$  gaat. Snijdt deze rechte de parabool steeds in één reëel en één imaginair punt? Verklaar.
33. ★★ Gegeven zijn twee imaginaire punten  $A(2-i, 4+3i)$  en  $B(6+5i, -2-i)$ .
- Bereken het midden  $M$  van het segment  $[AB]$ . Is dit punt reëel of imaginair?
  - Gegeven is nu dat het midden van de imaginaire punten  $C(1+2i, y_C)$  en  $D(x_D, 3-4i)$  het reële punt  $M'(3,1)$  is. Bepaal de coördinaten  $y_C$  en  $x_D$ . Zijn  $C$  en  $D$  noodzakelijk toegevoegd imaginaire punten?
34. ★★ Een rechte waarvan de richtingscoëfficiënt voldoet aan  $m^2 = -1$  (dus  $m = i$  of  $m = -i$ ) noemen we een isotrope rechte.
- Stel de cartesische vergelijkingen op van de twee isotrope rechten  $d_1$  en  $d_2$  die door het reële punt  $P(2,3)$  gaan.
  - Toon aan dat deze twee rechten toegevoegd imaginaire rechten zijn.
  - Bereken de afstand van een willekeurig punt  $A(x_1, y_1)$  tot de rechte  $d_1$  via de klassieke afstandsnorm. Wat valt je op?
35. ★★ Gegeven is de reële cirkel  $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$  en het punt  $P(1,1)$  dat duidelijk binnen de cirkel ligt. Uit de reële analyse weten we dat er vanuit  $P$  geen reële raaklijnen aan de cirkel getrokken kunnen worden.
- Toon aan dat er vanuit  $P$  wel twee imaginaire raaklijnen aan de cirkel bestaan.
  - Bereken de homogene coördinaten van de twee imaginaire raakpunten  $R_1$  en  $R_2$  op de cirkel.
  - Toon aan dat de rechte  $R_1R_2$  (de verbindingslijn van de imaginaire raakpunten) een reële rechte is.

## 6) Coördinatentransformaties

36. ★★ We voeren een algemene affiene coördinatentransformatie uit. De nieuwe oorsprong is  $\mathcal{O}'(-1,2)$ . De nieuwe basisvectoren hebben eindpunten in  $E_1'(1,3)$  en  $E_2'(-2,4)$ .
- Stel de transformatiematrix  $M$  op.
  - Bereken de coördinaten in het oorspronkelijke stelsel van het punt  $A$  dat in het nieuwe stelsel de coördinaat  $A(3,-2)$  heeft.
  - Een rechte  $t$  heeft in het oorspronkelijke stelsel de vergelijking  $2x - y + 4 = 0$ . Wat is de vergelijking van deze rechte in het nieuwe assenstelsel?
  - Een kegelsnede  $\mathcal{K}$  heeft in het nieuwe assenstelsel de gereduceerde vorm  $x'^2 + 4y'^2 = 1$ . Bepaal de vergelijking van deze kegelsnede in het oorspronkelijke assenstelsel.
  - Teken het punt  $A$ , de rechte  $l$  en de kegelsnede  $\mathcal{K}$  in het assenstelsel  $\mathcal{O}xy$ .
37. ★★★ Gegeven is een coördinatentransformatie naar een nieuw assenstelsel  $\mathcal{O}'x'y'$  met een nieuwe oorsprong  $\mathcal{O}'(2,3)$ . De nieuwe assen zijn ontstaan door het oorspronkelijke assenstelsel over een hoek van  $\theta = 45^\circ$  in tegenwijzerzin te roteren en vervolgens te verschuiven naar  $\mathcal{O}'$ . De eenheidsvectoren behouden hun lengte.
- Stel de transformatiematrix  $M$  op.
  - Bepaal de coördinaat van het punt  $P(2, 3 + \sqrt{2})$  in het nieuwe assenstelsel.
  - Gegeven is parabool  $\mathcal{P} \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + (\sqrt{2} - 10)x - (\sqrt{2} + 10)y + 25 + \sqrt{2} = 0$ . Bepaal de vergelijking van de parabool t.o.v.  $\mathcal{O}'x'y'$ .
  - Bepaal de coördinaat van het brandpunt  $F$  en van de richtlijn  $d$  van de parabool  $\mathcal{P}$  t.o.v. beide assenstelsels.
  - Teken het punt  $P$  en de parabool  $\mathcal{P}$  samen met zijn brandpunt en richtlijn in het assenstelsel  $\mathcal{O}xy$ .

## 7) Kegelsneden

38. ★★ Bewijs dat een kegelsnede door de isotrope punten gaat als en slechts als het een cirkel is.
39. ★★ Bepaal de projectieve coördinaten van de snijpunten van twee willekeurige concentrische cirkels met een verschillende straal.
40. ★★ De gegeven kegelsneden zijn ontaard. Bepaal hun componenten en hun dubbelpunten.
- $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x - 6y + 9 = 0$
  - $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
41. ★★ Gegeven is de kegelsnede  $\mathcal{K} \leftrightarrow x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 1 = 0$ , waarbij  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- Bepaal voor welke waarde(n) van  $\lambda$  de kegelsnede ontaardt.
  - Bespreek voor die specifieke waarde(n) de aard de componenten.

42. ★★ Ten opzichte van een georthonormeed assenstelsel wordt de vergelijking van een affiene kegelsnede gegeven. Bepaal de aard, stel een gereduceerde vergelijking op, en maak een schets van de bijhorende kromme.
- a)  $\mathcal{K} \leftrightarrow 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x + 6y + 5 = 0$
- b)  $\mathcal{K} \leftrightarrow 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$
43. ★★ Bespreek de aard van de kegelsneden in functie van de parameter  $\lambda$  :
- a)  $\mathcal{K} \leftrightarrow 2x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 + 2\lambda x + 4y + \lambda + 2 = 0$
- b)  $\mathcal{K} \leftrightarrow \lambda x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2\lambda x = 0$
44. ★★\* Analooq aan een rechtenbundel (door één vast punt) kan een kegelsnedenbundel (die door vier vaste punten gaat) homogeen geschreven worden als  $\mathcal{K} \leftrightarrow k \cdot \mathcal{K}_1 + m \cdot \mathcal{K}_2 = 0$ , of niet-homogeen als  $\mathcal{K} \leftrightarrow k \cdot \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = 0$ . Beschouw de vier punten  $A(1,1)$ ,  $B(-1,1)$ ,  $C(-1,-1)$  en  $D(1,-1)$ .
- a) Geef de vergelijking van twee ontaarde kegelsneden (rechtenparen) die door deze vier punten gaan. (Combineer de punten telkens twee aan twee).
- b) Stel de algemene vergelijking op van de kegelsnedenbundel door deze vier punten.
- c) Bepaal de vergelijking van de kegelsnede uit deze bundel die bovendien door punt  $E(3,0)$  gaat.
45. ★★ Voor een niet-parabolische kegelsnede worden de middelpunten gevonden via de partiële afgeleiden. Als een kegelsnede parabolisch is ( $\delta = 0$ ), bezit ze een hele rechte aan middelpunten (de as van de parabool of de symmetrieas van evenwijdige rechten). Gegeven is de parabolische ontaarde kegelsnede:  $\mathcal{K} \leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$
- a) Toon aan dat  $\delta = 0$  en  $\Delta = 0$ .
- b) Bepaal de meetkundige plaats van de middelpunten van deze kegelsnede door het stelsel voor het centrum op te lossen. Hoe verhoudt deze rechte zich tot de componenten.