Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

De regel van l'Hôpital

1. Bereken de volgende limieten:

a) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$

b) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{x-\sin x}$

c) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$

d) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos\left(2x\right)\right)}{x^2}$

e) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Bgsin}\,x-x}{x^3}$

f) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$

g) ★ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{\left(x-1\right)^2}$

h) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

i) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln\left(1+x\right)}{x^2}$

j) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

k) ★★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Bgsin}\left(2x\right)-2\,\text{Bgsin}\,x}{x^3}$

l) ★⋆ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-2\,\text{Bgcos}\,x-2x}{x^3}$

m) ★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Bgtan}\,x-\sin x}{x^3}$

n) ★★ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Bgtan}(x^2)-x^2}{x^6}$

2. Bereken de volgende limieten:

a) ★★ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\text{Bgtan}\,x\right)^x$

b) ★★ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(x\cdot\text{Bgsin}\left(\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$

c) ★★ $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{Bgsin}\,x)^{\tan x}$

d) ★★⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\,\text{Bgtan}\,x-\dfrac{\pi x^3}{2}+x^2\right)$

e) ★★⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-e^{1/x}\right)^x$

f) ★⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

g) ★★★⋆ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$

3. ★ Verklaar de fout in de volgende berekening en bereken de limiet op de juiste manier: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x+1}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1}=0$.

4. ★⋆ Iemand gebruikt correct de methode van l'Hôpital maar komt in een oneindige lus terecht:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=L$$

Bereken deze limiet zonder de regel van l'Hôpital te gebruiken.

5. ★★ Iemand doet de volgende berekening: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ en besluit dat beide limieten niet bestaan omdat $f\left(x\right)=1+\cos x$ blijft schommelen tussen 0 en 2.

Bereken de limiet zonder l'Hôpital te gebruiken en verklaar waar de fout zit in de berekening.

6. ★★ Iemand past herhaaldelijk de regel van l'Hôpital toe, maar de limieten worden alleen maar moeilijker:

$$\lim_{x\to 0^{>}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^{>}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0^{>}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^{>}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^{>}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} \overset{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^{>}} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{3x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0^{>}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} = \ldots$$

Bereken deze limiet op een andere manier.

Veel succes!

Antwoorden (moeilijkheidsgraad ★: eenvoudig, ★★: gemiddeld, ★★★: lastig, ★★★★: erg moeilijk)

1.	a) $\frac{1}{6}$	b) 4	c) $\frac{1}{20}$	d) -2	e) $\frac{1}{6}$	f) $\frac{1}{2}$	g) $\frac{-1}{2}$
	h) $\frac{1}{6}$	i) $\frac{1}{2}$	j) 2	k) 1	l) $\frac{1}{3}$	m) $\frac{-1}{6}$	n) $\frac{-1}{3}$
2.	a) $e^{\frac{-2}{\pi}}$	b) $\frac{1}{6}$	c) 1	d) $\frac{1}{3}$	e) $\frac{1}{e}$	f) e^3	g) $\frac{1}{3}$
3.	Simpelweg invullen						
4.	Rekenregels van limieten bij irrationale functies gebruiken						
5.	De uitgekomen limiet die niet bestaat wil niet zeggen dat de gegeven limiet niet bestaat						
6.	Voer een makkelijke substitutie uit						

Voorbeeldoplossingen:

1. Bereken de volgende limieten:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{3x^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{6x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{x-\sin x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{1-\cos x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}+2\sin x}{\sin x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{\cos x}=4$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-6+6\cos x}{5x^4}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-6\sin x}{20x^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-6\cos x}{60x^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x}{120x}\overset{*}{=}\dfrac{1}{20}$

$*:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x}{120x}=\dfrac{1}{20}\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}_{=1}=\dfrac{1}{20}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos(2x)\right)}{x^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}\overset{*}{=}-2$

$*:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}=-2\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}_{=1}=-2$ (als $x\to 0$ dan zal ook $2x\to 0$)

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Bgsin}\,x-x}{x^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-x^2\right)^{-1/2}-1}{3x^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-3/2}\cdot\left(-2x\right)}{6x}=\dfrac{1}{6}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot e^{x^2}-2x}{4x^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cdot e^{x^2}}{8x}=\dfrac{1}{2}$

(je kan hier ook substitutie $t=x^2$ gebruiken: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{2t}\overset{H}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t}{2}=\dfrac{1}{2}$)

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{2}=\dfrac{-1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6\cdot\sin x\cdot\cos^2 x-3\sin^3 x}=\dfrac{1}{6}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{-1}{(1+x)^2}}{2}=\dfrac{1}{2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}=2$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Bgsin}(2x)-2\,\mathrm{Bgsin}\,x}{x^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(1-4x^2\right)^{-1/2}-2\left(1-x^2\right)^{-1/2}}{3x^2}$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-4x^2\right)^{-3/2}\cdot\left(-8\cancel{x}\right)+\left(1-x^2\right)^{-3/2}\cdot\left(-2\cancel{x}\right)}{6\cancel{x}}=1$$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-2\,\mathrm{Bgcos}\,x-2x}{x^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}-2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\left(1-x^2\right)^{-3/2}\cdot\left(-2\cancel{x}\right)}{6\cancel{x}}=\dfrac{1}{3}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Bgtan}\,x-\sin x}{x^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}+\sin x}{6x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{-1}{6}$$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Bgtan}(x^2)-x^2}{x^6}\overset{t=x^2}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{Bgtan}\,t-t}{t^3}\overset{H}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}-1}{3t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\cancel{t^2}}{\left(1+t^2\right)3\cancel{t^2}}=\dfrac{-1}{3}$

2. Bereken volgende limieten

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{Bgtan}\,x\right)^x=L\overset{*}{=}e^{\ln L}=e^{-\frac{2}{\pi}}$

$$*:\ln L=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Bgtan}\,x\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Bgtan}\,x\right)}{1/x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\mathrm{Bgtan}\,x}{-1/x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{\left(1+x^2\right)\cdot\mathrm{Bgtan}\,x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{Bgtan}\,x}=-\frac{2}{\pi}$$

b) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(x\cdot\mathrm{Bgsin}\left(\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$ stel $t=\dfrac{1}{x}$, dan zal $t\underset{>}{\to}0$ als $x\to+\infty$, dan wordt de limiet:

$$L=\lim_{t\underset{>}{\to}0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}\cdot\mathrm{Bg}\sin t-1\right)=\lim_{t\underset{>}{\to}0}\frac{\mathrm{Bg}\sin t-t}{t^3}\overset{\text{oef 1e}}{=}\frac{1}{6}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{Bgsin}\,x)^{\tan x}=L\overset{*}{=}e^{\ln L}=e^0=1$

$$*:\ln L=\lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln\left(\mathrm{Bgsin}\,x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\mathrm{Bgsin}\,x\right)}{\cot x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{\mathrm{Bgsin}\,x}{-1}}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}_{=-1}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{\mathrm{Bgsin}\,x}\overset{H}{=}-\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=0$$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\,\mathrm{Bgtan}\,x-\frac{\pi x^3}{2}+x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Bgtan}\,x-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{-3}{x^4}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{-3x^2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{3}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(2-e^{1/x}\right)^x=L\overset{*}{=}e^{\ln L}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$*:\ln L=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(2-e^{1/x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2-e^{1/x}\right)}{1/x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{\substack{t\to0\\>}}\frac{\ln\left(2-e^{t}\right)}{t}\overset{H}{=}\lim_{\substack{t\to0\\>}}\frac{-e^t}{2-e^t}=-1$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=L\overset{*}{=}e^{\ln L}=e^3$

$*:\ln L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^3+x^2+1\right)}{\ln x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x^3+x^2+1}=3$

g) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\cdot\tan^2x}\cdot\underbrace{\frac{\cos^2x}{\cos^2x}}_{=1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\cdot\sin^2x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}}_{=1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sin x-x\cos x\right)\cdot\left(\sin x+x\cos x\right)}{x^4}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\overset{*}{=}\frac{1}{3}\cdot2=\frac{2}{3}$

$*:\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cancel{\cos x}-\cancel{\cos x}+\cancel{x}\sin x}{3\cancel{x^2}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)=1+1=2$

3. Verklaar de fout in de volgende berekening en bereken de limiet op de juiste manier:

$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x+1}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1}=0.$

De regel van l'Hôpital mag niet gebruikt worden, want $\lim_{x\to0}\cos x=1$ en $\lim_{x\to0}\left(x+1\right)=1$, dus

$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x+1}=1$

4. Iemand gebruikt correct de methode van l'Hôpital maar komt in een oneindige lus terecht:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}=L$$

Bereken deze limiet zonder de regel van l'Hôpital te gebruiken.

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

5. Iemand doet de volgende berekening: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ en besluit dat beide limieten niet bestaan omdat $f(x)=1+\cos x$ blijft schommelen tussen 0 en 2.

   Bereken de limiet zonder l'Hôpital te gebruiken en verklaar waar de fout zit in de berekening.

   De regel van l'Hôpital mag enkel gebruikt worden als de limiet die je uitkomt bestaat, wat hier niet het geval is.

   Juist is: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=1+1=2$

6. Iemand past herhaaldelijk de regel van l'Hôpital toe, maar de limieten worden alleen maar moeilijker:

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\overset{H}{=}\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{1}=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\overset{H}{=}\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}=\ldots$$

   Bereken deze limiet op een andere manier.

   Gebruik de substitutie $t=\frac{1}{x}$, dan is $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{1/t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}\overset{H}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0$.