6) Kegelsneden

1. $\mathcal{K}_1: \ x^2-5xy+4y^2=(x-4y)(x-y)$, zodat de componenten zijn $r_1 \leftrightarrow x-4y=0$ en $r_2 \leftrightarrow x-y=0$

$\mathcal{K}_2: \ 4y^3-4y+x^2y=y\left(x^2+4y^2-4\right)$, zodat de componenten zijn $r \leftrightarrow y=0$ en $\mathcal{E} \leftrightarrow x^2+4y^2=4$

$\mathcal{K}_3: \left(x^2+y^2\right)^2-3\left(x^2+y^2\right)+2=\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-2\right)$, zodat de componenten zijn $\mathcal{C}_1 \leftrightarrow x^2+y^2=1$ en $\mathcal{C}_2 \leftrightarrow x^2+y^2=2$.

2. $\mathcal{K}_1 \leftrightarrow x^2+4y^2=0 \Leftrightarrow (x+2iy)(x-2iy)=0 \Leftrightarrow x+2iy=0 \ \vee \ x-2iy=0$

$\mathcal{K}_2 \leftrightarrow x^2+2xy+y^2+2x+2y+5=0 \Leftrightarrow (x+y)^2+2(x+y)+5=0 \Leftrightarrow x+y=-1-2i \vee x+y=-1+2i$

$\mathcal{K}_3 \leftrightarrow x^2+y^2+4x-6y+13=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+2+i(y-3)\right)\left(x+2-i(y-3)\right)=0$

$\Leftrightarrow x+iy+2-3i=0 \ \vee \ x-iy+2+3i=0$

3. Noem $\mathcal{K} \leftrightarrow ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy=0$, dan krijgen we:

$$\begin{cases} P_1(1,i,0) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow a-a'+2b''i=0 \\ P_2(1,-i,0) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow a-a'-2b''i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-a'=0 \\ b''=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b''=0 \end{cases}$$

Zoals we weten is dit inderdaad de vereiste voor $\mathcal{K}$ om een cirkel (al dan niet reëel) te zijn.

4.

a) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{vmatrix}=-1/4$ en $\delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$ ($\mathcal{K}$ is een niet-ontaarde parabool)

b) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 7/2 & 0 \\ 7/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=73$ en $\delta=\begin{vmatrix} 1 & 7/2 \\ 7/2 & -6 \end{vmatrix}=-73/4$ ($\mathcal{K}$ is een niet-ontaarde hyperbool)

5. $\mathcal{K}_1 \leftrightarrow 6x^2+5xy-6y^2=0 \Leftrightarrow (2x+3y)(3x-2y)=0 \Leftrightarrow 2x+3y=0 \ \vee \ 3x-2y=0$

Dit zijn twee reële rechten die loodrecht op elkaar staan.

$\mathcal{K}_2 \leftrightarrow x^2-4xy+4y^2=0 \Leftrightarrow (x-2y)^2=0 \Leftrightarrow x-2y=0 \ (\times 2)$

Dit zijn twee reële, samenvallende rechten.

$$\mathcal{K}_3 \leftrightarrow x^2-xy+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0 \Leftrightarrow x+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y=0 \ \vee \ x+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y=0$$

Dit zijn twee toegevoegd imaginaire rechten.

6. Van een rechtenpaar door het punt (x_0, y_0).

7. a) $\mathcal{K} \leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+3)=0 \ \Leftrightarrow \ 2x^2+xy-y^2+5x+2y+3=0$

b) $\mathcal{K} \leftrightarrow (x+2y+1-iy)(x+2y+1+iy)=0 \ \Leftrightarrow \ (x+2y+1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+4xy+5y^2+2x+4y+1=0$

8.

a) De twee componenten zijn DP_1 en DP_2. $DP_1 \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x+y-1=0$ en analoog $DP_2 \leftrightarrow -3x-3y+15=0$.

De kegelsnede zal dus zijn: $\mathcal{K} \leftrightarrow (x-y+1)(x+y-5)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-y^2-4x+6y-5=0$

b) $\mathcal{K} \leftrightarrow 7x^2-xy=0 \Leftrightarrow x(7x-y)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 7x-y=0$.

De rechten door $D(3,2,1)$ evenwijdig met de componenten zijn dus: $x-3=0$ en $7x-y-19=0$.

De kegelsnede is dus $\mathcal{K} \leftrightarrow (x-3)(7x-y-19)=0 \;\Leftrightarrow\; 7x^2-xy-40x+3y+57=0$

9.

a) $\mathcal{K} \leftrightarrow xy+3y^2-2x-8y+4=0$: $\Delta=0, \delta=-1/4 \Rightarrow \mathcal{K}$ is ontaard in twee verschillende reële rechten.

$xy+3y^2-2x-8y+4=(y-2)(x+3y-2) \Rightarrow r_1 \leftrightarrow y-2=0$ en $r_2 \leftrightarrow x+3y-2=0$.

Deze rechten snijden elkaar in het dubbelpunt $(-4,2)$ en de punten op oneindig zijn $(1,0,0)$ en $(3,-1,0)$.

b) $\mathcal{K} \leftrightarrow 2x^2+5xy-3y^2-9x+8y-5=0$: $\Delta=0, \delta=-49/4 \Rightarrow \mathcal{K}$ is ontaard in twee versch. reële rechten.

$\mathcal{K} \leftrightarrow (x+3y-5)(2x-y+1)=0 \;\Rightarrow r_1 \leftrightarrow x+3y-5=0$ en $r \leftrightarrow 2x-y+1=0$

Deze rechten snijden in het dubbelpunt $(2/7, 11/7)$ of homogeen $(2,11,7)$.

De punten op oneindig zijn $(3,-1,0)$ en $(1,2,0)$.

c) $\mathcal{K} \leftrightarrow 4x^2-12xy+9y^2+24x-36y+36=0$: $\Delta=0, \delta=0 \Rightarrow \mathcal{K}$ is ontaard in twee evenwijdige rechten.

$4x^2-12xy+9y^2+24x-36y+36=(2x-3y)^2+12(2x-3y)+36=(2x-3y+6)^2$

$\Rightarrow r_1 \leftrightarrow 2x-3y+6=0$ is de vergelijking van beide (samenvallende) componenten. Alle punten op deze rechte zijn dubbelpunten en het punt op oneindig is $(3,2,0)$.

d) $\mathcal{K} \leftrightarrow 49x^2-14xy+y^2+28x-4y+29=0$: $\Delta=0, \delta=0 \Rightarrow \mathcal{K}$ is ontaard in twee evenwijdige rechten.

$49x^2-14xy+y^2+28x-4y+29=(7x-y)^2+4(7x-y)+29=(7x-y+2+5i)(7x-y+2-5i)$

$\Rightarrow r_1 \leftrightarrow 7x-y+2-5i=0$ en $r_2 \leftrightarrow 7x-y+2+5i=0$ zijn de twee toegevoegd imaginaire evenwijdige rechten die elkaar snijden in het dubbelpunt $(1,7,0)$, tevens hun punt op oneindig.

10.

a) De voorwaarde vertaalt zich als $\Delta=0$, $\delta>0$ (een ontaarde ellips)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda/2 \\ 0 & \lambda^2-2 & 0 \\ \lambda/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-2) - \frac{\lambda^2}{4}(\lambda^2-2) = \frac{\lambda}{4}(\lambda^2-2)(4-\lambda) \text{ en } \delta = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-2).$$

De enige waarde waarvoor dit kan is dus $\lambda=4$ (de andere nulpunten van Δ zijn ook nulpunten van δ).

b) De voorwaarde vertaalt zich als $\Delta=0$, $\delta=0$ (een ontaarde parabool)

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 4\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{4}, \text{ dus } \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & \mu \\ -1 & 1/4 & -2 \\ \mu & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{\mu^2}{4}+4\mu-16=0 \Leftrightarrow \mu=8.$$

c) Dan moet $\lambda^2-1=2\mu=0 \Leftrightarrow \mu=0$ en $\lambda=1 \vee \lambda=-1$.

11.

a) $\mathcal{K} \leftrightarrow x^2+xy+y^2+15y+60=0$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 15/2 \\ 0 & 15/2 & 60 \end{bmatrix},$$ $\Delta=-45/4$ en $\delta=3/4$ (met $a\Delta=-45/4$) $\Rightarrow$ een reële, niet-ontaarde ellips.

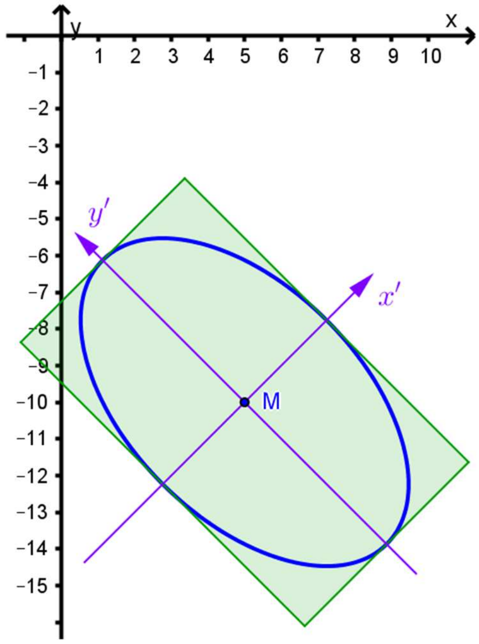
Met behulp van de partiële afgeleiden bepalen we het middelpunt: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-10 \end{cases}$

Voor de draaihoek geldt: $\frac{1}{2}\tan^2\alpha - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$. Neem $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dan is $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 5 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zodat $C_1 = M^T \cdot C \cdot M = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$.

Ten opzichte van het nieuwe assenstelsel geldt dus $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 15$ of nog $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x'^2}{10} + \frac{y'^2}{30} = 1$.

Dit is een ellips in standaardvorm $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} = 1$, met $\alpha = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ en $\beta = \sqrt{30} \approx 5{,}48$. Deze gegevens laten ons makkelijk toe de assenrechthoek te tekenen en dus de ellips heel goed te schetsen.



b) $\mathcal{K} \leftrightarrow 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x + 6y + 5 = 0$

$C = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 1 \\ 12 & 16 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, dus $\Delta = -25$ en $\delta = 0$. Een niet-ontaarde parabool.

We berekenen eerst de draaihoek (er is geen middelpunt):
$12\tan^2\alpha - 7\tan\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = 4/3 \;\vee\; \tan\alpha = -3/4$. Neem $\cos\alpha = 3/5$ en $\sin\alpha = 4/5$.

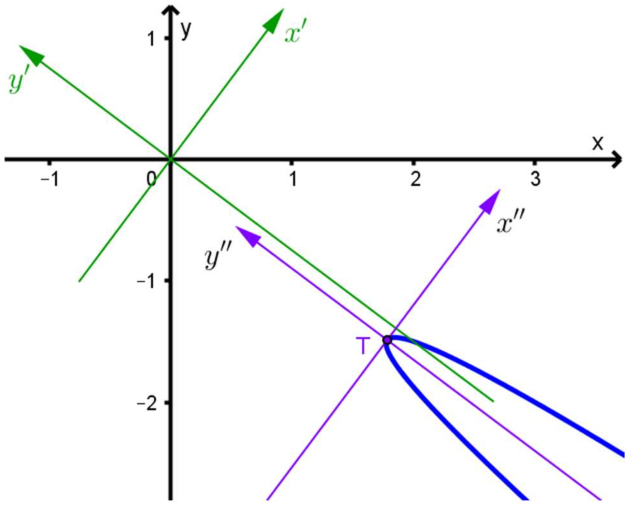
Dan is $M = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zodat $C_1 = M^T \cdot C \cdot M = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Dus $\mathcal{K} \leftrightarrow 25x'^2 + 6x' + 2y' + 5 = 0$.

Verschuiven geeft ons $\mathcal{K} \leftrightarrow 25(x'' + x_0)^2 + 6(x'' + x_0) + 2(y'' + y_0) + 5 = 0$, we zorgen dan dat

$\begin{cases} 50x_0 + 6 = 0 \\ 25x_0^{\,2} + 6x_0 + 2y_0 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3/25 \\ y_0 = -58/25 \end{cases}$, zodat $\mathcal{K} \leftrightarrow 25x''^2 + 2y'' = 0$.

Dit is een parabool in standaardvorm $\mathcal{K} \leftrightarrow x''^2 = -\frac{2}{25}y''$.

De top van de parabool is dus het punt met als coördinaat $(-3/25, -58/25)$ t.o.v. het (x', y')-assenstelsel.



c) $\mathcal{K} \leftrightarrow 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$

$C = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -16 \\ -2 & -16 & -6 \end{bmatrix}$, $\Delta = -2000$ en $\delta = 50$ (met $a\Delta = -12000$) $\Rightarrow$ een reële, niet-ontaarde ellips.

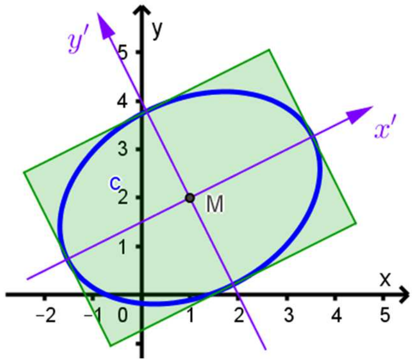
Met behulp van de partiële afgeleiden bepalen we het middelpunt: $\begin{cases} 12x - 4y - 4 = 0 \\ -4x + 18y - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Voor α geldt: $-2\tan^2\alpha - 3\tan\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = -2 \vee \tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. Kies $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ en neem $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ en $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Dan is $M = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 1 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zodat $C_1 = M^T \cdot C \cdot M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$.

Ten opzichte van het nieuwe assenstelsel geldt dus $\mathcal{K} \leftrightarrow 5x'^2 + 10y'^2 = 40$ of nog $\mathcal{K} \leftrightarrow \dfrac{x'^2}{8} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$.

Dit is een ellips in standaardvorm $\mathcal{K} \leftrightarrow \dfrac{x'^2}{\alpha^2} + \dfrac{y'^2}{\beta^2} = 1$, met $\alpha = \sqrt{8} \approx 2{,}83$ en $\beta = \sqrt{4} = 2$. Deze gegevens laten ons makkelijk toe de assenrechthoek te tekenen en dus de ellips heel goed te schetsen.



12. d) $\mathcal{K} \leftrightarrow 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 46x - 28y - 106 = 0$

$C = \begin{bmatrix} 16 & -12 & -23 \\ -12 & 9 & -14 \\ -23 & -14 & -106 \end{bmatrix}$, dus $\Delta = -15625$ en $\delta = 0$. Een niet-ontaarde parabool.

We berekenen eerst de draaihoek (er is geen middelpunt):

$-12\tan^2\alpha + 7\tan\alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = 4/3 \ \vee\ \tan\alpha = -3/4$. Neem $\cos\alpha = 3/5$ en $\sin\alpha = 4/5$.

Dan is $M = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zodat $C_1 = M^T \cdot C \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -25 \\ 0 & 25 & 10 \\ -25 & 10 & -106 \end{bmatrix}$. Dus

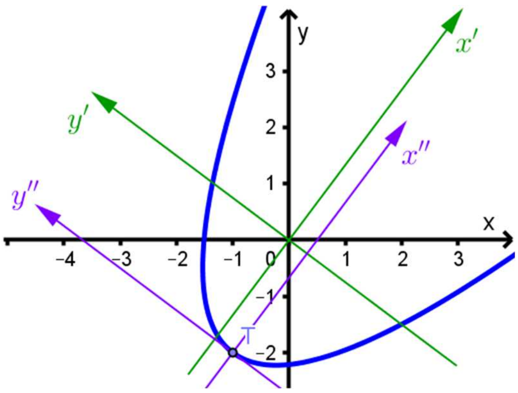
$\mathcal{K} \leftrightarrow 25y'^2 - 50x' + 20y' - 106 = 0$.

Verschuiven geeft ons $\mathcal{K} \leftrightarrow 25(y'' + y_0)^2 - 50(x'' + x_0) + 20(y'' + y_0) - 106 = 0$, we zorgen dan dat

$\begin{cases} 50y_0 + 20 = 0 \\ 25{y_0}^2 - 50x_0 + 20y_0 - 106 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -11/5 \\ y_0 = -2/5 \end{cases}$, zodat $\mathcal{K} \leftrightarrow 25y''^2 - 50x'' = 0$.

Dit is een parabool in standaardvorm $\mathcal{K} \leftrightarrow y''^2 = 2x''$.

De top van de parabool is dus het punt met als coördinaat $(-11/5, -2/5)$ t.o.v. het (x', y')-assenstelsel.



(Reken zelf maar eens na dat de top in het oorspronkelijke assenstelsel coördinaat $(-1, -2)$ heeft).

e) $\mathcal{K} \leftrightarrow xy - 2x + 4y = 0$

We kunnen de vergelijking ontbinden als $\mathcal{K} \leftrightarrow (x+4)(y-2) = 8$. Deze vergelijking kennen we reeds van vroeger (de vierdes) als een hyperbool met als asymptoten $x = -4$ en $y = 2$. We doen het nu ook eens volgens de regels van de kunst:

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = -2$ en $\delta = -1/4 \Rightarrow$ een hyperbool.

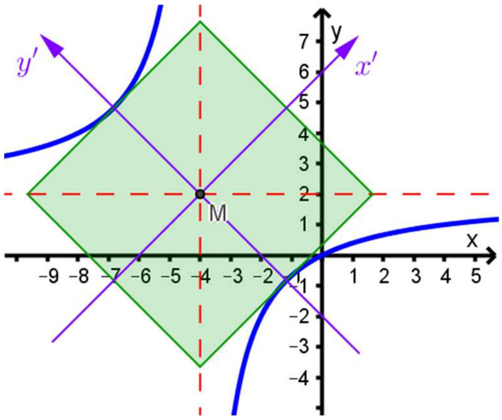
Met behulp van de partiële afgeleiden bepalen we het middelpunt: $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$.

Voor de draaihoek geldt: $\frac{1}{2}\tan^2\alpha - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Neem $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dan is $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -4 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zodat $C_1 = M^T \cdot C \cdot M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Ten opzichte van het nieuwe assenstelsel geldt dus $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = -8$ of nog $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{16} = -1$.

Dit is een (orthogonale) hyperbool in standaardvorm $\mathcal{K} \leftrightarrow \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\alpha^2} = 1$, met $\alpha = \sqrt{16} = 4$. µDeze gegevens laten ons makkelijk toe de assenrechthoek te tekenen en dus de ellips heel goed te schetsen.



13. $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$ en $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$ (met $a\Delta = \frac{1}{2}$), dit is dus een imaginaire ellips.

14. a) $\mathcal{K} \leftrightarrow \lambda x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 1 - 1 - \lambda - \lambda - 3 = 3\lambda^2 - 2\lambda - 5$$ (met nulpunten $\lambda = -1$ en $\lambda = 5/3$).

$\delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$ (met nulpunten $\lambda = -1$ en $\lambda = 1$)

$\eta = 2\lambda$ (met nulpunt $\lambda = 0$)

$a\Delta = 3\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda$ (met nulpunten $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ en $\lambda = 5/3$).

λ	δ	Δ	$a\Delta$	η	Type kegelsnede
	+	+	-	-	Een niet-ontaarde reële ellips
-1	0	0	0	-	Een ontaarde parabool
	-	-	+	-	Een niet-ontaarde hyperbool
0	-	-	0	0	Een niet-ontaarde orthogonale hyperbool
	-	-	-	+	Een niet-ontaarde hyperbool
1	0	-	-	+	Een niet-ontaarde parabool
	+	-	-	+	Een niet-ontaarde reële ellips
$5/3$	+	0	0	+	Een ontaarde ellips
	+	+	+	+	Een niet-ontaarde imaginaire ellips

b) $\mathcal{K} \leftrightarrow 2x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 + 2\lambda x + 4y + \lambda + 2 = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 2\lambda(\lambda+2) + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 8 - \lambda^2(\lambda+2) = -2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 8$$

Nulpunten van Δ zijn 2, $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$

$\delta = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda^2$, nulpunten zijn 0 en 2.

$\eta = 2 + \lambda$, nulpunt is -2.

Omdat $a = 2$ zal $a\Delta$ hetzelfde teken hebben als Δ.

λ	δ	Δ	$a\Delta$	η	Type kegelsnede
	-	+	+	-	Een niet-ontaarde hyperbool
-2	-	+	+	0	Een niet-ontaarde orthogonale hyperbool
	-	+	+	+	Een niet-ontaarde hyperbool
$-\sqrt{2}$	-	0	0	+	Een ontaarde hyperbool
	-	-	-	+	Een niet-ontaarde hyperbool
0	0	-	-	+	Een niet-ontaarde parabool
	+	-	-	+	Een niet-ontaarde reële ellips
$\sqrt{2}$	+	0	0	+	Een ontaarde ellips
	+	+	+	+	Een niet-ontaarde imaginaire ellips
2	0	0	0	+	Een ontaarde parabool
	-	-	-	+	Een niet-ontaarde hyperbool

c) $\mathcal{K} \leftrightarrow \lambda x^2 + \left(\lambda^2 - 2\right) y^2 + \lambda x + 1 = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda/2 \\ 0 & \lambda^2 - 2 & 0 \\ \lambda/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 2\right) - \frac{\lambda^2}{4}\left(\lambda^2 - 2\right) = \frac{\lambda}{4}\left(\lambda^2 - 2\right)\left(4 - \lambda\right)$$ (nulptn $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{2}$, $\lambda = 4$)

$\delta = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 2 \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 2\right)$ (nulptn $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{2}$) en $\eta = \lambda + \lambda^2 - 2$ (nulptn $\lambda = 1$ en $\lambda = -2$)

$a\Delta = \frac{\lambda^2}{4}\left(\lambda^2 - 2\right)\left(4 - \lambda\right)$ (nulptn $\lambda = 0$ (dubbel), $\lambda = \pm\sqrt{2}$, $\lambda = 4$)

λ	δ	Δ	$a\Delta$	η	Type kegelsnede
	-	-	+	+	Een niet-ontaarde hyperbool
-2	-	-	+	0	Een niet-ontaarde orthogonale hyperbool
	-	-	+	-	Een niet-ontaarde hyperbool
$-\sqrt{2}$	0	0	0	-	Een ontaarde parabool
	+	+	-	-	Een niet-ontaarde reële ellips
0	0	0	0	-	Een ontaarde parabool
	-	-	-	-	Een niet-ontaarde hyperbool
1	-	-	-	0	Een niet-ontaarde orthogonale hyperbool
	-	-	-	+	Een niet-ontaarde hyperbool
$\sqrt{2}$	0	0	0	+	Een ontaarde parabool
	+	+	+	+	Een niet ontaarde imaginaire ellips
4	+	0	0	+	Een ontaarde ellips
	+	-	-	+	Een niet-ontaarde reële ellips