

1. Bepaal een stel parametervergelijkingen van de rechte r bepaald door:

- a) De punten $A(0, -3, 2)$ en $B(-1, -2, 3)$

We gebruiken $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-1, 1, 1)$ als richtingsvector en $\vec{A}(0, -3, 2)$ als plaatsvector, dan krijg je:

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = k - 3 \\ z = k + 2 \end{cases}$$

- b) Het punt $A(4, 5, -13)$ en de richtingsvector $\vec{R}(-1, 0, 2)$

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = -k + 4 \\ y = 5 \\ z = 2k - 13 \end{cases}$$

- c) Het punt $A(-1, -1, 2)$ en evenwijdig aan de rechte $b \leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$

We moeten eerst een richtingsvector bepalen van rechte b . Daartoe lossen we het stelsel op:

$$b \leftrightarrow \begin{cases} -3 - y + 4y - z = 1 \\ x = -3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3y - 4 \\ x = -3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k - 3 \\ y = k \text{ (} \in \mathbb{R} \text{)} \\ z = 3k - 4 \end{cases}$$

De vector $\vec{R}(-1, 1, 3)$ is dus een richtingsvector van rechte b en dus ook van de gezochte rechte r :

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = -k - 1 \\ y = k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases}$$

2. Bepaal een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte a bepaald door:

- a) De punten $A(0, 1, 2)$ en $B(3, 2, 4)$

We gebruiken $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (3, 1, 2)$ als richtingsvector en $\vec{A}(0, 1, 2)$ als plaatsvector, dan krijg je:

$$a \leftrightarrow \frac{x - 0}{3} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2}{2}$$

- b) Het punt $A(1, 5, 2)$ en de richtingsvector $\vec{R}(-1, 0, 1)$

Let hierbij op dat je niet kan delen door 0, je moet de standaardvorm dus lichtjes aanpassen tot:

$$a \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \\ y = 5 \end{cases}, \text{ of eenvoudiger geschreven wordt dit: } a \leftrightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

- c) Het punt $A(3, -1, 1)$ en evenwijdig aan de rechte $b \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$

We moeten eerst een richtingsvector bepalen van rechte b . Daartoe lossen we het stelsel op:

$$b \leftrightarrow \begin{cases} x + 2(-1-x) - z = 1 \\ y = -1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x-3 \\ y = -1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k (\in \mathbb{R}) \\ y = -k-1 \\ z = -k-3 \end{cases}$$

De vector $\vec{R}(1, -1, -1)$ is dus een richtingsvector van rechte b en dus ook van de gezochte rechte a :

$$a \leftrightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1} \text{ of eenvoudiger geschreven: } a \leftrightarrow x-3 = -y-1 = 1-z.$$

Alternatieve methode (die weliswaar wat meer inzicht vergt):

Je kan in het stelsel vergelijkingen van b ook bij de vlakken de constanten wijzigen zodat je evenwijdige vlakken krijgt die door A gaan. De gevraagde rechte wordt dan:

$$a \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ (want } 3 + 2 \cdot (-1) - 1 = 0 \text{ en } 3 + (-1) = 2 \text{)}$$

d) Het punt $P(1, 3, -2)$ en evenwijdig aan de rechte $l \leftrightarrow \frac{7x-3}{5} = \frac{2-y}{3} = 4z$

De rechte l herschrijven in standaardvorm geeft: $l \leftrightarrow \frac{x-3/7}{5/7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1/4}$

Dus $a \leftrightarrow \frac{x-1}{5/7} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{1/4}$ of vereenvoudigd: $a \leftrightarrow \frac{7x-7}{5} = \frac{y-3}{-3} = 4z+8$

3. Bepaal een parametervergelijking van de rechten p en q :

$$\bullet \quad p \leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ y = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ z = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k + 2 \\ y = k \\ z = k - 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad q \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ 3(-y - z) - y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - (-4y - 4) \\ z = -4y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 4 \\ y = k \\ z = -4k - 4 \end{cases}$$

Alternatief met rekenmachine:

$$q \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{cases} x + \frac{3}{4}z = 1 \\ y + \frac{1}{4}z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3k + 1 \\ y = -k - 1 \\ z = 4k \end{cases} \text{ (hierbij kozen we } 4k \text{ als parameter in plaats van } k \text{ om breuken te vermijden).}$$

(Ga zelf eens na dat beide parametervoorstellingen wel degelijk dezelfde rechte voorstellen).

4. Ga na dat de punten $A(2, 5, 1)$, $B(3, 1, 2)$ en $C(4, -3, 3)$ collineair zijn.

We stellen de vergelijking van AB op: $AB \leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z-1}{1}$ of nog $AB \leftrightarrow x-2 = \frac{y-5}{-4} = z-1$

Als we punt C invullen, dan geeft dit: $4-2 = \frac{-3-5}{-4} = 3-1$. Deze uitdrukking klopt uiteraard dus $C \in AB$.

5. Gegeven zijn de punten $A(2,2,4)$, $B(0,-4,2)$, $C(0,-5,2)$ en $D(2,-1,4)$.

Bewijs dat de rechten AB en CD elkaar snijden en bepaal hun snijpunt.

We stellen de vergelijkingen op van AB en CD , met $\overrightarrow{AB}(-2,-6,-2) \sim (1,3,1)$ en $\overrightarrow{CD}(2,4,2) \sim (1,2,1)$:

$$AB \leftrightarrow x = \frac{y+4}{3} = z-2, \text{ dat (met kruisproducten) kan herschreven worden tot } AB \leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

$$CD \leftrightarrow x = \frac{y+5}{2} = z-2, \text{ dat (met kruisproducten) kan herschreven worden tot } CD \leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Om het snijpunt te berekenen lossen we het stelsel op: } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - z = -2 \\ 2x - y = 5 \\ x - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Het snijpunt is } S(-1, -7, 1).$$

6. Gegeven is het punt $P(3,2,0)$ en de vectoren $\vec{R}_1(1,3,4)$ en $\vec{R}_2(1,-3,2)$.

- a) Bepaal een parametervergelijking van het vlak α met richtingsvectoren $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ dat door P gaat.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = k + m + 3 \\ y = 3k - 3m + 2 \\ z = 4k + 2m \end{cases}$$

- b) Vorm deze parametervergelijking om tot een cartesische vergelijking.

$$\begin{cases} x = k + m + 3 \\ y = 3k - 3m + 2 \\ z = 4k + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x - m - 3 \\ y = 3(x - m - 3) - 3m + 2 \\ z = 4(x - m - 3) + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x - m - 3 \\ y = 3x - 6m - 7 \\ z = 4x - 2m - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x - m - 3 \\ y = 3x - 3(4x - z - 12) - 7^* \\ 2m = 4x - z - 12 \end{cases}$$

In de vergelijking * zijn de parameters k en m geëlimineerd. Dit geeft $\alpha \leftrightarrow 9x + y - 3z - 29 = 0$.

- c) Controleer je antwoord op vraag (b) door de determinantvergelijking op te stellen.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 18(x-3) + 2(y-2) - 6z = 0 \Leftrightarrow 18x + 2y - 6z - 58 = 0 \\ \Leftrightarrow 9x + y - 3z - 29 = 0$$

7. Bepaal een parametervergelijking van het vlak $\beta \leftrightarrow 2x - 3y + 7z = 6$

Stel $y = 2k$ en $z = 2m$ (om breuken te vermijden) dan krijg je $2x - 3 \cdot 2k + 7 \cdot 2m = 6 \Leftrightarrow x = 3 + 3k - 7m$, dus:

$$\beta \leftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 7m + 3 \\ y = 2k \\ z = 2m \end{cases}$$

8. Bepaal een cartesische vergelijking van vlak γ evenwijdig aan $\alpha \leftrightarrow 2x - y + 3z = 9$ door $T(2,4,-1)$.

$$\alpha // \gamma \Leftrightarrow \gamma \leftrightarrow 2x - y + 3z + t = 0. T \in \gamma \Leftrightarrow 2 \cdot 2 - 4 + 3 \cdot (-1) + t = 0 \Leftrightarrow t = 3. \text{ Dus } \gamma \leftrightarrow 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

Alternatief (sneller): Behoud de coëfficiënten van x , y en z maar vul onmiddellijk het punt in binnen haakjes.

$$\gamma \leftrightarrow 2(x-2) - (y-4) + 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

9. Gegeven zijn de rechten $a \leftrightarrow \frac{x+2}{2} = -8 - y = \frac{z-1}{5}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2r \\ y = 4 - r \\ z = 7 + 5r \end{cases}$.

Ga na dat er een uniek vlak γ is dat a en b bevat en stel er een cartesische vergelijking van op.

De rechten zijn duidelijk evenwijdig want ze hebben eenzelfde richtingsvector $\vec{R}(2, -1, 5)$.

Om te zien of ze snijden vullen we nu de parametervergelijking van b in bij de cartesische vergelijkingen van a :

$$\frac{-3+2r+2}{2} = -8 - (4-r) = \frac{7+5r-1}{5}, \text{ maar dit is duidelijk onmogelijk.}$$

De rechten zijn dus strikt evenwijdig en bepalen een vlak.

We nemen voor het vlak ook de richtingsvector $\vec{R}(2, -1, 5)$ en gebruiken de twee punten $P_a(-2, -8, 1)$ en

$P_b(-3, 4, 7)$ om een extra richtingsvector te berekenen: $\overrightarrow{P_a P_b} = \overrightarrow{P_b} - \overrightarrow{P_a} = (-1, 12, 6)$

$$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y+8 & z-1 \\ -1 & 12 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 66(x+2) + 17(y+8) - 23(z-1) = 0 \Leftrightarrow 66x + 17y - 23z + 291 = 0.$$

10. Zoek met behulp van een vlakkenwaaier de vergelijking van vlak α dat door $d \leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ z-y=6 \end{cases}$ gaat en het

punt $Q(-1, -1, 2)$ bevat.

Elk vlak door d kan geschreven worden als $\alpha \leftrightarrow k \cdot (x+2y-z+3) + m \cdot (z-y-6) = 0$

(merk daarbij op dat je eerst de vergelijkingen moet herschrijven zodat het rechterlid nul is).

$$Q(-1, -1, 2) \in \alpha \Leftrightarrow k \cdot (-1+2(-1)-2+3) + m \cdot (2-(-1)-6) = 0 \Leftrightarrow -2k - 3m = 0.$$

Kies je bijvoorbeeld $k = 3$ en $m = -2$ (dan klopt dus $-2k - 3m = 0$), dan wordt de vergelijking:

$$\alpha \leftrightarrow 3 \cdot (x+2y-z+3) - 2 \cdot (z-y-6) = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y - 5z + 21 = 0.$$