

Oplossingen

1. Gegeven is de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ en een punt $P \in BC$ zodat $|BP| = 2 \cdot |CB|$.

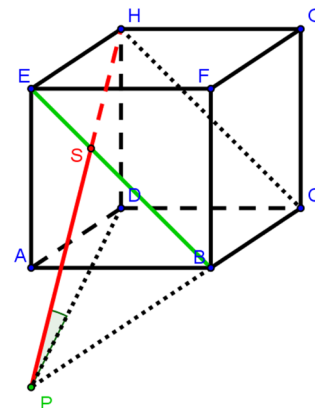
- a) Bepaal het snijpunt van de rechte PH met het voorvlak $ABFE$ van de kubus.
De rechte PH ligt in het diagonaalvlak $BEHC$ van de kubus dat het voorvlak snijdt in BE . De doorboring is dus punt S .
- b) Bereken de hoek die de rechte PH maakt met het grondvlak.

De hoek die PH maakt met het grondvlak is de hoek $\widehat{DPH}$ want PD is de loodrechte projectie van PH op het grondvlak.

Neem voor de eenvoud van berekening aan dat de ribbe van de kubus 1 meet.

Dan is $|PC| = 3$ en $|CD| = 1$ zodat geldt $PD = \sqrt{10}$.

In rechthoekige driehoek $\triangle PDH$ geldt dan: $\tan \widehat{DPH} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \widehat{DPH} \approx 17^\circ 32' 54''$



2. Gegeven is een kubus $\begin{pmatrix} EFGH \\ ABCD \end{pmatrix}$.

- De lengte van $[BG]$ is $9,80 \text{ m}$. Leid hieruit af dat de ribbe van de kubus ongeveer $6,93 \text{ m}$ is.

$[BG]$ is een zijvlaksdiaagonaal dus geldt:

$$|BG| = \sqrt{2} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{|BG|}{\sqrt{2}} = \frac{9,80}{\sqrt{2}} \approx 6,93$$

In deze kubus zijn de driehoek BDG en de lichaamsdiagonaal CE getekend.

- Bewijs dat $CE \perp BDG$.

Om te bewijzen dat een rechte loodrecht staat op een vlak moeten we twee snijlijnen vinden in dat vlak die loodrecht staan op de rechte.

We verschuiven $[BG]$ en $[DG]$ één ribbe naar onder (naar $[B'C]$ en $[D'C]$) zodat ze $[CE]$ wel snijden.

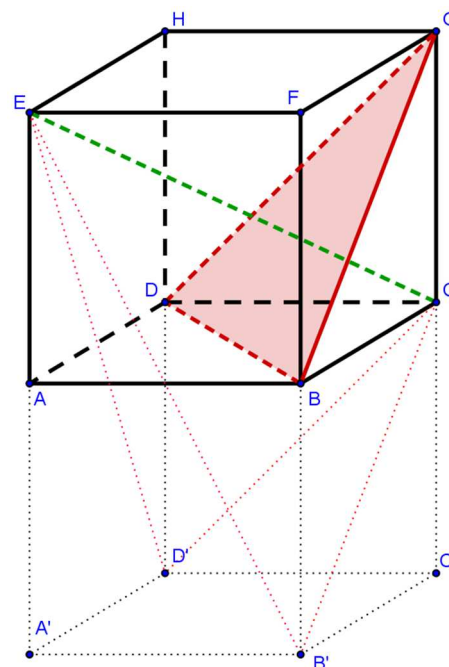
Op de figuur geldt dan dat $|EC| = \sqrt{3} \cdot r$, $|B'C| = |D'C| = \sqrt{2} \cdot r$ en $|B'E| = |D'E| = \sqrt{5} \cdot r$ (Pythagoras).

Dus is $(\widehat{EC, BG}) = (\widehat{EC, B'C}) = \widehat{ECB'} = 90^\circ$ (want $|EC|^2 + |CB'|^2 = |EB'|^2$)

En ook $(\widehat{EC, DG}) = (\widehat{EC, D'C}) = \widehat{ECD'} = 90^\circ$ (want $|EC|^2 + |CD'|^2 = |ED'|^2$)

Omdat $EC \perp BG$ en $EC \perp DG$ zal dus $EC \perp vl(BDG)$ $\square$

Van de eerste kubus zijn de opstaande ribben AE, BF, CG en DH verticaal. We kantelen de kubus nu om hoekpunt C zodat de lichaamsdiagonaal CE verticaal komt te staan.



- Bereken, tot op de tweede nauwkeurig, de hoek waarover de kubus is gekanteld.

Uit de figuur volgt dat deze hoek gelijk is aan de hoek $\widehat{ECG}$.

$$\cos \widehat{ECG} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ECG} \approx 54^\circ 44' 08''$$

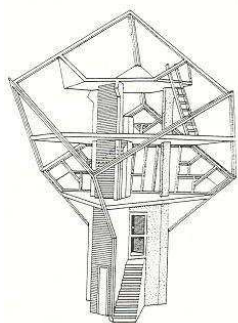
We bewezen reeds dat $CE \perp BDG$ zodat in dit geval dus de driehoek BDG horizontaal komt te liggen. We kunnen deze driehoek dan beschouwen als vloer van een zogenaamde kubuswoning.

- Reken na dat de oppervlakte van deze vloer ongeveer 42 m^2 is.

Dit is een gelijkzijdige driehoek met als zijde $|BG| = 9,80$, zodat de

$$\text{oppervlakte gegeven wordt door } S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 9,80^2 \approx 41,59 \text{ (m}^2\text{)}.$$

(deze woningen bestaan echt en kan je bewonderen in Rotterdam. De architect heet Piet Blom.)



- De rechten AB en CD zijn kruisende rechten. Bewijs dat ook AC en BD kruisende rechten zijn.

AB en CD zijn kruisende rechten

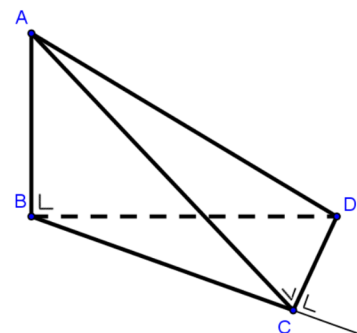
$\Leftrightarrow A, B, C$ en D zijn niet coplanair

$\Leftrightarrow AC$ en BD zijn kruisende rechten.

- Gegeven een viervlak $ABCD$, waarbij $AB \perp BD$, $BC \perp CD$ en $AC \perp CD$.

Bewijs dat dan ook $AB \perp BC$.

- $AC \perp CD$ en $BC \perp CD \Leftrightarrow CD \perp vl(ABC)$
- $CD \perp vl(ABC) \Rightarrow CD \perp AB$
- $CD \perp AB$ en $BD \perp AB \Leftrightarrow AB \perp vl(BCD)$
- $AB \perp vl(BCD) \Rightarrow AB \perp BC \quad \square$

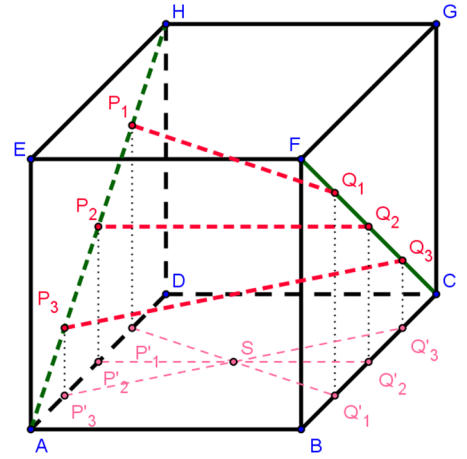


- Twee overstaande kruisende zijvlaksdagonalen $[AH]$ en $[BG]$ in een kubus worden respectievelijk door de punten P_1, P_2, P_3 en Q_1, Q_2, Q_3 in vier gelijke delen verdeeld, waarna de punten op gelijke hoogte met elkaar worden verbonden (zie figuur).

Bereken de hoek tussen de kruisende rechten P_1Q_1 en P_3Q_3 .

Al deze rechten zijn evenwijdig met het grondvlak. We verschuiven ze dus naar het grondvlak (zie figuur) en verkrijgen dus dat:

$$\begin{aligned} \widehat{(P_1Q_1, P_3Q_3)} &= \widehat{(P'_1Q'_1, P'_3Q'_3)} = \widehat{P'_1SP'_3} = 2 \cdot \widehat{P'_1SP'_2} = 2 \cdot \text{Bgtan} \left(\frac{1/4}{1/2} \right) \\ &\approx 53^\circ 07' 48'' \end{aligned}$$



6. Construeer de gemeenschappelijke loodlijn van de ribbe $[BF]$ en de

ruimtediagonaal $[AG]$ in de kubus $\begin{pmatrix} EFGH \\ ABCD \end{pmatrix}$.

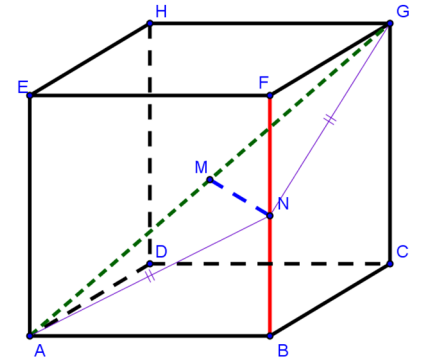
Bewijs dat wat je tekende wel degelijk de gemeenschappelijke loodlijn is.

Noem M het midden van $[AG]$ en N het midden van BF . Dan is $[MN]$

het gemeenschappelijke loodlijnstuk.

$MN \perp BF$ want $MN \parallel BD$ en $BD \perp BF$ (diagonaalvlak is een rechthoek)

$MN \perp AG$ want het is duidelijk dat $|AN| = |GN|$ zodat N op de middelloodlijn ligt van $[AG]$. $\square$



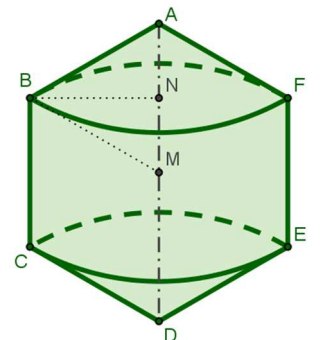
7. Bereken de inhoud van de figuur die ontstaat door een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde z te laten wentelen om de rechte AD .

Het is duidelijk dat de zo ontstane ruimtefiguur bestaat uit twee kegels en een cilinder.

Noem M het centrum van de zeshoek, dan kunnen we eenvoudig de straal r en de hoogte h van de kegels berekenen want $\triangle ABM$ is gelijkzijdig:

$$r = |BN| = \frac{\sqrt{3}}{2} z \text{ en } h = |AN| = \frac{1}{2} z \text{ (met } N \text{ het midden van } [AM] \text{)}.$$

$$\text{Dus } I = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} z \right)^2 \cdot \frac{1}{2} z}_{\text{kegel}} + \underbrace{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} z \right)^2 \cdot z}_{\text{cilinder}} = \pi z^3$$



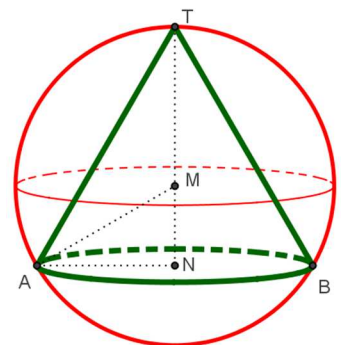
8. In een bol $\mathcal{B}$ met straal r wordt een kegel $\mathcal{K}$ ingeschreven met hoogte $\frac{3r}{2}$.

Bereken de verhoudingen van hun volumes $\frac{V_{\mathcal{K}}}{V_{\mathcal{B}}}$ en hun oppervlaktes $\frac{S_{\mathcal{K}}}{S_{\mathcal{B}}}$.

Zonder de algemeenheid te schaden noemen we de straal van de bol 1.

We bekijken een dwarsdoorsnede door het middelpunt M van de bol. Zo verkrijgen we de figuur hiernaast.

Het gegeven vertaalt zich dan tot: $|AM| = 1, |TN| = \frac{3}{2}, |MN| = \frac{1}{2}$.



We kunnen dan eenvoudig berekenen $r_K = |AN| = \sqrt{|AM|^2 - |MN|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Pythagoras in $\triangle MAN$)

Verder is het apothema van de kegel: $a_K = |TB| = \sqrt{|TN|^2 + r_K^2} = \sqrt{3}$ (Pythagoras in $\triangle TAN$)

$$\text{Dit geeft: } \frac{V_K}{V_B} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot r_K^2 \cdot h_K}{\frac{4}{3}\pi \cdot r_B^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{9}{32} \text{ en } \frac{S_K}{S_B} = \frac{\pi r_K^2 + \pi r_K a_K}{4\pi r_B^2} = \frac{\pi \cdot \frac{3}{4} + \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{4\pi} = \frac{9}{16}$$

9. In het orthonormale assenstelsel ($Oxyz$) staan twee kubussen naast elkaar zoals afgebeeld op de figuur. De kubussen hebben ribbe 1.

- a) Bepaal de coördinaten van de aangeduide punten A , B en C .

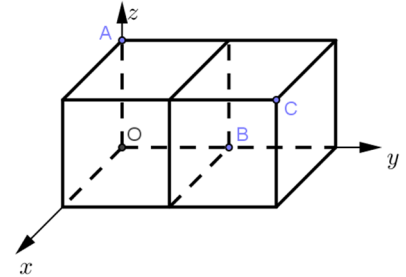
$$A(0,0,1), B(0,1,0) \text{ en } C(1,2,1).$$

- b) Bereken de lengtes $|AB|$, $|BC|$ en $|CA|$.

De stelling van Pythagoras geeft $|AB| = \sqrt{2}$, $|BC| = \sqrt{3}$ en $|CA| = \sqrt{5}$.

- c) Leid hieruit af dat de driehoek $\triangle ABC$ rechthoekig is.

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |CA|^2 \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ is rechthoekig.}$$



10. Gegeven zijn de punten $A(7,1,-1)$, $B(1,-5,2)$ en $C(1,-1,3)$.

Bepaal de coördinaat van P als geldt dat $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{O}$.

$$\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{O} \Leftrightarrow \vec{A} - \vec{P} + 2(\vec{B} - \vec{P}) + 3(\vec{C} - \vec{P}) = \vec{O} \Leftrightarrow \vec{P} = \frac{\vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C}}{6}$$

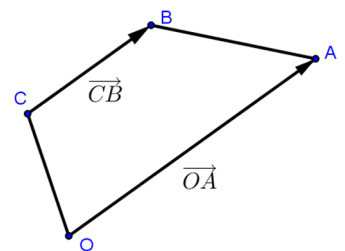
$$\text{Dus } P\left(\frac{7+2\cdot 1+3\cdot 1}{6}, \frac{1+2\cdot (-5)+3\cdot (-1)}{6}, \frac{-1+2\cdot 2+3\cdot 3}{6}\right) \Rightarrow P(2,-2,2)$$

11. In het trapezium $OABC$ geldt dat $BC \parallel OA$ en dat $|BC| = \frac{1}{2}|OA|$.

Bereken de coördinaat van C als $O(0,0,0)$, $A(-4,2,-6)$ en $B(4,1,-3)$.

$$\text{Uit de figuur blijkt dat } \vec{OA} = 2\vec{CB} \Leftrightarrow \vec{A} = 2(\vec{B} - \vec{C}) \Leftrightarrow \vec{C} = \frac{2\vec{B} - \vec{A}}{2}$$

$$\text{Dus } C\left(\frac{2\cdot 4 + 4}{2}, \frac{2\cdot 1 - 2}{2}, \frac{2\cdot (-3) + 6}{2}\right) \Rightarrow C(6,0,0)$$



12. In een viervlak $ABCD$ is M het midden van $[AB]$ en N het midden van $[CD]$.

$$\text{Bewijs dat } \vec{MN} = \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{AD} + \vec{BC} + \vec{BD}).$$

Uit de formule voor het midden volgt dat $\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ en $\vec{N} = \frac{\vec{C} + \vec{D}}{2}$, zodat:

$$\begin{aligned}
RL &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}(\vec{C} - \vec{A} + \vec{D} - \vec{A} + \vec{C} - \vec{B} + \vec{D} - \vec{B}) \\
&= \frac{1}{4}(2\vec{C} + 2\vec{D} - 2\vec{A} - 2\vec{B}) = \frac{\vec{C} + \vec{D}}{2} - \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} = \vec{N} - \vec{M} = \overrightarrow{MN} = LL \quad \square
\end{aligned}$$