

1. Gegeven zijn de vectoren $\vec{A}(1,2,3)$ en $\vec{B}(4,-1,2)$.

a) Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ tot op de seconde nauwkeurig.

$$\cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \Rightarrow (\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) \approx 62^\circ 11' 17''.$$

b) Verander de z -coördinaat van vector $\vec{B}$ zodat $\vec{A} \perp \vec{B}$.

$$\text{Stel } \vec{B}'(4, -1, b). \text{ Dan geldt } \vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot b = 0 \Leftrightarrow b = -2/3. \text{ Dus } \vec{B}'\left(4, -1, -\frac{2}{3}\right).$$

2. In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(1,2,1)$, $B(2,3,2)$, $C(-2,1,-1)$ en $D(4,1,0)$.

a) Bepaal de cartesische vergelijking van het vlak α dat door de punten A, B en C gaat.

Methode 1: zonder GRM

Gebruik als richtingsvectoren $\vec{AB} = (1,1,1)$ en $\vec{BC} = (-4,-2,-3)$, dan krijg je als parametervergelijking:

$$\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = k - 4m + 1 \\ y = k - 2m + 2 \\ z = k - 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x + 4m - 1 \\ y = x + 4m - 1 - 2m + 2 \\ z = x + 4m - 1 - 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x + 4m - 1 \\ y = x + 2(z - x) + 1^* \\ m = z - x \end{cases}$$

Cartesisch geeft dit dus: $\alpha \Leftrightarrow x + y - 2z - 1 = 0$.

Methode 2: met GRM

$$\text{De determinantvergelijking wordt: } \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \overset{\substack{\text{PRGM} \\ \text{vlak}}}{\Leftrightarrow} -x - y + 2z + 1 = 0.$$

b) Bepaal de coördinaat van het voetpunt van de loodlijn neergelaten uit D op α .

$$\text{De rechte } d \text{ loodrecht op } \alpha \text{ heeft richtingsvector } \vec{R}(1,1,-2), \text{ dus } d \Leftrightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}.$$

$$\text{Schrijven we dit anders dan wordt dit: } d \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}.$$

Het gezochte voetpunt V is het snijpunt van d en α .

$$\text{Dus voor } V \text{ geldt: } \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{cases} \Rightarrow V(10/3, 1/3, 4/3)$$

3. In een driedimensionaal orthonormaal assenstelsel zijn gegeven het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y + 2 = 0$, de rechte

$$r \leftrightarrow \frac{x}{3} = y - 2 = \frac{z + 1}{2} \text{ en het punt } P(2, 1, 0).$$

a) Stel de vergelijking op van het vlak β dat r en P bevat.

We hebben dus twee punten $P(2, 1, 0)$ en $Q(0, 2, -1)$ en een richtingsvector $\vec{R}(3, 1, 2)$ gegeven.

Methode 1: met richtingsvectoren

Gebruik als richtingsvectoren $\vec{R}(3, 1, 2)$ en $\vec{PQ} = (-2, 1, -1)$, dan krijg je als parametervergelijking:

$$\beta \leftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 2m + 2 \\ y = k + m + 1 \\ z = 2k - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 2(y - k - 1) + 2 \\ m = y - k - 1 \\ z = 2k - y + k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \cdot \frac{y + z - 1}{3} - 2y + 4^* \\ m = y - k - 1 \\ k = \frac{y + z - 1}{3} \end{cases}$$

Cartesisch geeft dit dus: $\beta \leftrightarrow 3x + y - 5z - 7 = 0$.

Methode 2: met GRM: De determinantvergelijking wordt:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} PRGM \\ vlak \end{matrix}} 3x + y - 5z - 7 = 0.$$

Methode 3: met een vlakkenwaaier

Herschrijf rechte r als $r \leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$, dan geldt $\beta \leftrightarrow k \cdot (x - 3y + 6) + m \cdot (2y - z - 5) = 0$.

$P(2, 1, 0) \in \beta \Leftrightarrow k \cdot (2 - 3 \cdot 1 + 6) + m \cdot (2 \cdot 1 - 0 - 5) = 0 \Leftrightarrow 5k - 3m = 0$. Kiezen we $k = 3, m = 5$ dan krijgen we: $\beta \leftrightarrow 3 \cdot (x - 3y + 6) + 5 \cdot (2y - z - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5z - 7 = 0$.

b) Stel de cartesische vergelijkingen op van de loodlijn uit P op α .

De loodlijn heeft als richtingsvector een normaalvector van α : neem $\vec{R}(1, -1, 0)$.

Voor de loodlijn geldt dus: $l \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-1} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

c) Bepaal de afstand van P tot rechte r .

Het vlak dat door P gaat en loodrecht op r staat heeft als vergelijking $\lambda \leftrightarrow 3(x - 2) + (y - 1) + 2z = 0$.

Eenvoudiger geschreven wordt dit: $\lambda \leftrightarrow 3x + y + 2z = 7$.

Het snijpunt van λ en r noemen we L : $\begin{cases} 3x + y + 2z = 7 \\ x - 3y = -6 \\ 2y - z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 5/2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow L(3/2, 5/2, 0).$

De afstand van P tot r is dan gelijk aan de afstand $|PL| = \sqrt{(3/2 - 2)^2 + (5/2 - 1)^2 + (0 - 0)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(1,2,0)$, $B(2,1,2)$ en $C(3,1,1)$,

en de rechte $d \leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y - z = 2 \end{cases}$.

- a) Bepaal de cartesische vergelijking van het vlak α dat het punt A en de rechte d bevat.

Voor de vlakkenwaaier door rechte d geldt: $\alpha \leftrightarrow k \cdot (4x + 2y + z - 3) + m \cdot (6x + 3y - z - 2) = 0$.

$$A(1,2,0) \in \alpha \Leftrightarrow k \cdot (4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 - 3) + m \cdot (6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 0 - 2) = 0 \Leftrightarrow 5k + 10m = 0.$$

$$\text{Kies } k = 2, m = -1: \alpha \leftrightarrow 2 \cdot (4x + 2y + z - 3) - (6x + 3y - z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z - 4 = 0$$

- b) Bereken de afstand van B tot vlak α .

$$d(B, \alpha) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

- c) Bereken de hoek tussen rechte AC en vlak α op de tweede nauwkeurigheid.

Rechte AC heeft als richting $\overrightarrow{AC}(2, -1, 1)$, zodat voor de hoek geldt:

$$\sin(\widehat{AC, \alpha}) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{14} \sqrt{6}} \Leftrightarrow (\widehat{AC, \alpha}) \approx 40^\circ 53' 36''$$

5. In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(0,1,0)$ en $B(2,3,1)$, en de rechte

$$c \leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}.$$

- a) Bepaal het punt $C \in c$ zo dat AB en AC elkaar loodrecht snijden.

$$\text{We zoeken eerst een parametervoorstelling van } c: c \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = 2k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (1 - k) + 2 \cdot (k - 1) + 1 \cdot 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0, \text{ dus } C(1, 0, 0).$$

- b) Bepaal de cartesische vergelijking van de rechte d zo dat $A \in d$ en $d \perp vl(ABC)$.

$$\text{Voor dat vlak geldt: } vl(ABC) \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 4z - 1 = 0$$

$$\text{Voor de loodlijn geldt dan } d \leftrightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-4} \text{ of eenvoudiger } d \leftrightarrow x = y - 1 = \frac{-z}{4}$$

- c) Bepaal $F \in d$ zo dat $|AF| = |AC|$.

$$\text{Een parametervoorstelling van rechte } d \text{ is } d \leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k + 1 \\ z = -4k \end{cases}$$

Dus elk punt F van rechte d kan geschreven worden als $F(k, k + 1, -4k)$.

$$\begin{aligned} |AF| = |AC| &\Leftrightarrow \sqrt{(k-0)^2 + (k+1-1)^2 + (-4k-0)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} \\ &\Leftrightarrow 18k^2 = 2 \Leftrightarrow k^2 = 1/9 \Leftrightarrow k = 1/3 \vee k = -1/3 \end{aligned}$$

Er zijn twee oplossingen: $F_1(1/3, 4/3, -4/3)$ en $F_2(-1/3, 2/3, 4/3)$.

6. In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(4, -4, 0)$, $B(-4, 4, 0)$, $C(0, 0, 8)$ en $D(8, 8, 8)$ en het vlak $\alpha \leftrightarrow x + 2y - z = 4$.

a) Bepaal de cartesische vergelijking van het vlak β dat door A gaat en loodrecht staat op BC .

$$\overrightarrow{BC} = (4, -4, 8) \sim (1, -1, 2), \text{ dus } \beta \leftrightarrow 1 \cdot (x - 4) - 1 \cdot (y + 4) + 2 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 8 = 0.$$

b) Bepaal de coördinaat van het snijpunt P van de rechte BC met het vlak β .

$$\text{We werken met een parametervoorstelling: } BC \leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -k \\ z = 2k + 8 \end{cases}, \text{ en schrijven dus } P(k, -k, 2k + 8).$$

$$P \in \beta \Leftrightarrow k - (-k) + 2(2k + 8) - 8 = 0 \Leftrightarrow 6k + 8 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}. \text{ Dus } P\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right).$$

c) Bepaal de cartesische vergelijking van het vlak γ dat door D gaat en evenwijdig is met α .

$$\gamma \leftrightarrow x + 2y - z + t = 0. \quad D \in \gamma \Leftrightarrow 8 + 2 \cdot 8 - 8 + t = 0 \Leftrightarrow t = -16. \text{ Dus } \gamma \leftrightarrow x + 2y - z - 16 = 0.$$

d) Bereken de hoek tussen de vlakken β en γ .

$$\cos(\widehat{\beta, \gamma}) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\beta, \gamma}) = 60^\circ.$$