

1. In een orthonormale ijk is $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ een kubus met ribbe 2. De punten

P, Q, R, S en T zijn de middens van $[AE], [AB], [DH], [CO]$ en $[BF]$.

- a) ★ Op de figuur lijken de drie rechten PQ, RS en HT alle drie evenwijdig.

Bereken van elke rechte een stel richtingsgetallen.

$$P(2,0,1), Q(2,1,0), R(0,0,1), S(0,1,0), H(0,0,2) \text{ en } T(2,2,1),$$

$$\text{dus } \overrightarrow{PQ}(0,1,-1), \overrightarrow{RS}(0,1,-1) \text{ en } \overrightarrow{HT}(2,2,-1).$$

- b) ★ Leid uit (a) af dat $PQ \parallel RS$, maar $PQ \not\parallel HT$.

$\overrightarrow{PQ}$ is een veelvoud van $\overrightarrow{RS}$ maar niet van $\overrightarrow{HT}$ waaruit onmiddellijk het gestelde volgt.

- c) ★★ Stel een vectoriële vergelijking op van de rechte $r = HT$ en van het vlak $\alpha = vl(PQ, RS)$.

Voor r kunnen we als richtingsvector $\overrightarrow{HT}(2,2,-1)$ gebruiken en $\vec{H}(0,0,2)$ als plaatsvector:

$$r \leftrightarrow \vec{P}_1 = k \cdot \overrightarrow{HT} + \vec{H}$$

Voor α kunnen we als richtingsvectoren $\overrightarrow{RS}(0,1,-1)$ en $\overrightarrow{RP}(2,0,0)$ (dus ook $\vec{x}(1,0,0)$) gebruiken en

$$\vec{S}(0,1,0) \text{ als plaatsvector: } \alpha \leftrightarrow \vec{P}_2 = m \cdot \overrightarrow{RS} + n \cdot \vec{x} + \vec{S}$$

- d) ★★ Vorm deze vectoriële vergelijkingen om tot parametervergelijkingen.

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 2k \\ z = -k + 2 \end{cases} \text{ en } \alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = n \\ y = m + 1 \\ z = -m \end{cases}$$

- e) ★★ Vorm deze parametervergelijkingen om naar een stelsel cartesische vergelijkingen voor r en een cartesische vergelijking voor α .

$$r \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \text{ en } \alpha \leftrightarrow y + z = 1 \text{ (want } x \text{ is willekeurig en } -z = m = y - 1)$$

- f) ★★ Bepaal de onderlinge ligging van r en α .

$$\begin{cases} x = y \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}, \text{ dus de rechte } r \text{ snijdt het vlak } \alpha \text{ in het punt } (-2, -2, 3).$$

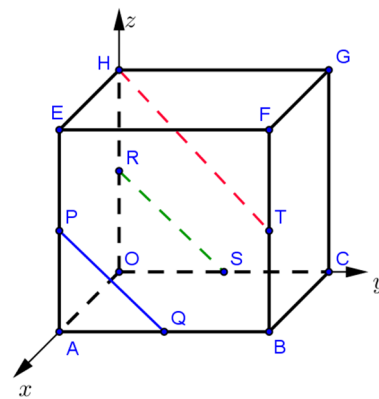
2. ★★ Gegeven zijn de punten $K(1,2,3)$ en $L(2,4,-1)$.

- c) Stel een parametervergelijking op van de rechte KL .

$$\text{We gebruiken als richtingsvector } \overrightarrow{KL}(1,2,-4), \text{ dan geldt dus: } KL \leftrightarrow \begin{cases} x = k + 1 \\ y = 2k + 2 \\ z = -4k + 3 \end{cases}$$

- d) Zoek het punt van KL waarvan de som van de coördinaatgetallen 0 is.

$$\text{Dan moet } k + 1 + 2k + 2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 6, \text{ zodat } P(7, 14, -21)$$



3. Gegeven zijn $P(1, -1, 1)$, $A(1, -1, -1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 1, -1)$ en $D(-1, 1, 1)$.

a) ★ Reken na dat AB en CD kruisende rechten zijn.

$\overrightarrow{AB}(0, 2, 2)$ en $\overrightarrow{CD}(-2, 0, 2)$ zijn lineair onafhankelijk, dus $AB \nparallel CD$.

Neem je als richtingsvectoren $\vec{R}_{AB}(0, 1, 1)$ en $\vec{R}_{CD}(-1, 0, 1)$ dan geldt:

$$AB \leftrightarrow \begin{cases} \text{parametrisch} \\ x = 1 \\ y = k_1 - 1 \\ z = k_1 - 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \text{cartesisch} \\ x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{ en } CD \leftrightarrow \begin{cases} \text{parametrisch} \\ x = -k_2 + 1 \\ y = 1 \\ z = k_2 - 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \text{cartesisch} \\ y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Een eventueel snijpunt zou dus moeten voldoen aan $\begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \\ y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ 1 = -1 \end{cases} \nexists$. De rechten snijden dus niet.

(Een veel snellere manier om dit te bewijzen is door in te zien dat $vl(ABC) \leftrightarrow x = 1$, en dat dus de punten A, B, C, D niet coplanair zijn zodat de rechten AB en CD wel kruisend moeten zijn!)

b) ★★★ Bepaal een parametervoorstelling van de rechte r_1 door P die de rechten AB en CD snijdt.

Methode 1

Neem een willekeurig punt $P_1(1, k_1 - 1, k_1 - 1) \in AB$ en $P_2(-k_2 + 1, 1, k_2 - 1) \in CD$, zodat geldt:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-k_2, 2 - k_1, k_2 - k_1) \text{ en dus heeft } P_1P_2 \text{ parametervergelijking } P_1P_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = -mk_2 + 1 \\ y = m(2 - k_1) + k_1 - 1 \\ z = m(k_2 - k_1) + k_1 - 1 \end{cases}$$

$$P(1, -1, 1) \in P_1P_2 \Leftrightarrow P_1P_2 \leftrightarrow \begin{cases} 1 = -mk_2 + 1 \\ -1 = m(2 - k_1) + k_1 - 1 \\ 1 = m(k_2 - k_1) + k_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mk_2 = 0 \\ 0 = m(2 - k_1) + k_1 \\ 2 = m(k_2 - k_1) + k_1 \end{cases}$$

Als $m = 0$, dan moet dus ook $k_1 = 0$ (tweede vgl) maar dan zou $2 = 0$ (derde vgl). Dus moet $k_2 = 0$:

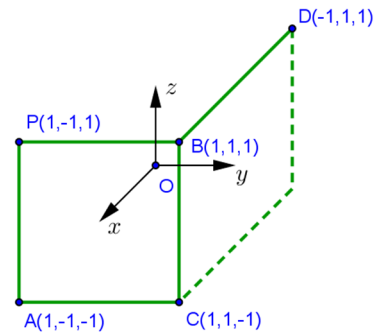
$$\begin{cases} 0 = 2m - mk_1 + k_1 \\ 2 = -mk_1 + k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ k_1 = 1 \end{cases}. \text{ De vergelijking van } P_1P_2 \text{ wordt dan } r_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = m \\ z = -m \end{cases}$$

Methode 2

Noemen we α het vlak bepaald door AB en P , en β het vlak bepaald door CD en P , dan is de gezochte rechte de snijlijn van beide vlakken.

Er geldt: $\alpha \leftrightarrow x = 1$ en $\beta \leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$ (reken dit na met bijvoorbeeld de determinantmethode)

$$\text{Dus } r_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -m \\ z = m \end{cases}$$



Methode 3

Een veel snellere manier om dit te vinden is door in te zien dat $r_1 = PC$ de gezochte rechte is.

Opm.: De werkwijze in het blauw is hier zo makkelijk omdat de gegeven punten zo eenvoudig liggen. De algemene werkwijze houdt altijd stand, dus zorg dat je die ook zeker begrijpt!

4. ★★★ Gegeven zijn het vlak $\alpha \leftrightarrow 4x - 5y + 4z - 3 = 0$, de rechte $r \leftrightarrow \begin{cases} 11x - 2y - 9 = 0 \\ 9x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$ en punt $P(5, 2, 1)$.

Bepaal een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte m die door P gaat, evenwijdig is met α en de rechte r snijdt.

Noemen we S het snijpunt van het vlak β (dat door P gaat en evenwijdig is aan α) en de rechte r , dan is $m = PS$.

$$\beta \leftrightarrow 4x - 5y + 4z + t = 0, \text{ en } P(5, 2, 1) \in \beta \Leftrightarrow 4 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -14,$$

dus:

$$\beta \leftrightarrow 4x - 5y + 4z - 14 = 0.$$

$$\text{Dus voor } S \text{ geldt: } \begin{cases} 11x - 2y - 9 = 0 \\ 9x - 2z - 7 = 0 \\ 4x - 5y + 4z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -10 \\ z = -8 \end{cases}, \text{ zodat } S(-1, -10, -8)$$

Als richtingsvector gebruiken we uiteraard $\overrightarrow{SP}(6, 12, 9) \sim (2, 4, 3)$, zodat

$$m \leftrightarrow \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{3}.$$

Alternatieve methode:

Je kan m ook beschouwen als de snijlijn van β (zoals in de methode hierboven)

en $\gamma = vl(P, r)$, zoals op de figuur hiernaast.

Met een vlakkenwaaier van r werken geeft:

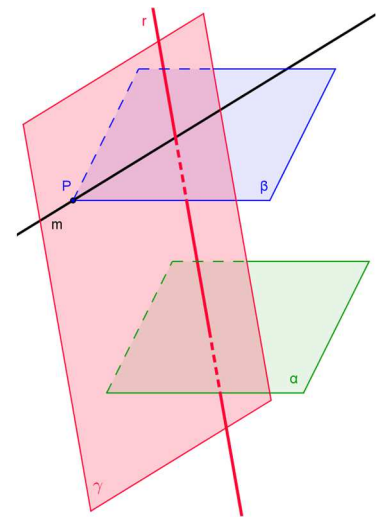
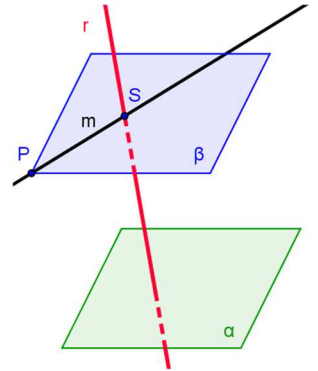
$$\gamma \leftrightarrow k \cdot (11x - 2y - 9) + l \cdot (9x - 2z - 7) = 0$$

$$P(5, 2, 1) \in \gamma \Leftrightarrow k \cdot (11 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 9) + l \cdot (9 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 7) = 0 \Leftrightarrow 42k + 36l = 0.$$

$$\text{Kies } k = 6 \text{ en } l = -7 \text{ dan krijg je } \gamma \leftrightarrow 6 \cdot (11x - 2y - 9) - 7 \cdot (9x - 2z - 7) = 0 \Leftrightarrow 3x - 12y + 14z - 5 = 0.$$

$$\text{Op deze manier kan je } m \text{ dus ook schrijven als } m \leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5y + 4z - 14 = 0 \\ 3x - 12y + 14z - 5 = 0 \end{cases}.$$

(Probeer zelf eens na te gaan dat beide methodes stelsels cartesische vergelijkingen opleveren die wel degelijk dezelfde rechte bepalen).



5. ★★ Gegeven zijn twee rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0 \\ x - y + 3z - 12 = 0 \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} 7x + 2y - 7 = 0 \\ 3x + 2z - 7 = 0 \end{cases}$.

Toon aan dat er een uniek vlak is dat a en b bevat en stel de vergelijking ervan op.

$$a \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0 \\ x - y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \stackrel{rref}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -2/3 \cdot k + 8/3 \\ y = 7/3 \cdot k - 28/3 \\ z = k \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \vec{R}_a(-2/3, 7/3, 1) \sim (-2, 7, 3) \text{ en } P_a(2, -7, 1) \text{ (stel } k = 1 \text{)}.$$

$$b \leftrightarrow \begin{cases} 7x + 2y - 7 = 0 \\ 3x + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \in \mathbb{R} \\ y = -7/2 \cdot k + 7/2 \\ z = -3/2 \cdot k + 7/2 \end{cases} \Rightarrow \vec{R}_b(1, -7/2, -3/2) \sim (2, -7, -3) \text{ en } P_b(1, 0, 2) \text{ (stel } k = 1 \text{)}.$$

De rechten zijn evenwijdig (want $\vec{R}_a = -\vec{R}_b$) dus ze bepalen een vlak:

$$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 14x + y + 7z - 28 = 0$$