

Uitbreiding: wanordes (Eng: derangements)

Probleem: Jan de postbode heeft 9 brieven mee: eentje voor elk huis in de kerkdreef, waar precies 9 huizen staan. Jammer genoeg staan er geen huisnummers op de brieven. Jan besluit dan ook om de 9 brieven elk in een willekeurige brievenbus te steken, zodat er in elke brievenbus precies één brief terecht komt. Bereken de kans dat er niemand de juiste brief krijgt.

We kunnen zo een mogelijkheid noteren als een opsomming van de cijfers 1 t.e.m. 9, waarbij geen enkel cijfer 'op zijn eigen plaats' staat. Je ziet hieronder enkele mogelijkheden opgesomd:

Juist	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Optie 1	2	1	4	3	6	5	9	7	8
Optie 2	9	1	2	3	4	5	6	7	8
Optie 3	9	8	7	6	1	2	3	4	5
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

De vraag is nu hoeveel opties er zijn in totaal. We noemen dit het aantal *wanordes* van orde 9. We noteren dit aantal met $!9$ (dus hetzelfde als een faculteit, maar met de orde na het uitroepingsteken).

Het is eenvoudig om een recursieformule op te stellen voor $!n$. We doen dit eerst voor ons voorbeeld.

Stel dat Jan brief 2 in de postbus van huisnr 1 steekt. Dan zijn er twee opties.

- Ofwel steekt hij brief 1 dan in de postbus van huisnr 2, en dan moeten de andere 7 brieven nog verdeeld worden.

Juist	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	1	Wanorde van orde 7						

- Ofwel steekt hij brief 1 in een andere postbus (dus niet in 1, maar ook niet naar 2). Dan ontstaat deze situatie:

Juist	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	Niet 1	Niet 3	Niet 4	Niet 5	Niet 6	Niet 7	Niet 8	Niet 9
	Wanorde van orde 8								

Maar Jan heeft natuurlijk 8 opties waar hij brief 2 kan steken, dus zo ontstaat de recursieformule:

$$!9 = 8 \cdot (!7 + !8)$$

Het is duidelijk dat deze formule kan veralgemeend worden naar $!n = (n-1) \cdot (!n-2 + !n-1)$.

Hiernaast staan de wanordes van orde 2 en 3, dus:

$$!2 = 1 \text{ en } !3 = 2$$

Juist	1	2
Optie 1	2	1

Juist	1	2	3
Optie 1	2	3	1
Optie 2	3	1	2

We vullen verder aan met behulp van de recursieformule:

- $!4 = 3(!2 + !3) = 3 \cdot (1 + 2) = 9$
- $!5 = 4(!3 + !4) = 4 \cdot (2 + 9) = 44$
- $!6 = 5(!4 + !5) = 5 \cdot (9 + 44) = 265$
- $!7 = 6(!5 + !6) = 6 \cdot (44 + 265) = 1854$
- $!8 = 7(!6 + !7) = 7 \cdot (265 + 1854) = 14833$
- $!9 = 8(!7 + !8) = 8 \cdot (1854 + 14833) = 133496$

De gezochte kans is dus $P = \frac{!9}{9!} = \frac{133496}{362880} \approx 36,79\%$.

Een expliciete formule

We kunnen (voor het probleem met de brieven) ook als volgt redeneren:

Van alle mogelijke permutaties $9!$ trekken we die af waarbij er minstens ééntje juist staat. Dit zijn er $9 \cdot 8!$. Maar van die $9 \cdot 8!$ zijn er $C_9^2 \cdot 7!$ waarvan er minstens twee juist staan. Dus die moeten we daar van aftrekken. Maar daarvan zijn er $C_9^3 \cdot 6!$ waarvan er minstens drie juist staan, dus moeten we ook die er weer van aftrekken. Als we zo verder gaan ontstaat dus deze formule:

$$\begin{aligned} !9 &= 9! - \left(C_9^1 \cdot 8! - \left(C_9^2 \cdot 7! - \left(C_9^3 \cdot 6! - \left(C_9^4 \cdot 5! - \left(C_9^5 \cdot 4! - \left(C_9^6 \cdot 3! - \left(C_9^7 \cdot 2! - \left(C_9^8 \cdot 1! - C_9^9 \cdot 0! \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \\ &= 9! - C_9^1 \cdot 8! + C_9^2 \cdot 7! - C_9^3 \cdot 6! + C_9^4 \cdot 5! - C_9^5 \cdot 4! + C_9^6 \cdot 3! - C_9^7 \cdot 2! + C_9^8 \cdot 1! - C_9^9 \cdot 0! \\ &= \sum_{i=0}^9 (-1)^i C_9^i (9-i)! = \sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{9!}{i! (9-i)!} (9-i)! = 9! \cdot \sum_{i=0}^9 \frac{(-1)^i}{i!} \end{aligned}$$

Zo vindt je dus ook dat:

$$!9 = 9! \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} - \frac{1}{362880} \right) = 133496$$

Hierover kan je online meer vinden onder de noemer 'inclusie-exclusieprincipe'.

Een helemaal te gekke expliciete formule

Er kan aangetoond worden dat bovendien geldt: $!n = \left\lfloor \frac{n! + 1}{e} \right\rfloor$.

Als we ons probleem dus uitbreiden naar n brieven dan nadert deze kans asymptotisch naar $\frac{1}{e}$. We bekijken dit even in een tabel:

n	$P(n) = \frac{!n}{n!}$	n	$P(n) = \frac{!n}{n!}$	n	$P(n) = \frac{!n}{n!}$
2	$\frac{1}{2} = 50\%$	5	$\frac{44}{120} \approx 36,67\%$	8	$\frac{14833}{40320} \approx 36,79\%$
3	$\frac{2}{6} = 33,33\%$	6	$\frac{265}{720} \approx 36,81\%$	↓	↓
4	$\frac{9}{24} = 37,5\%$	7	$\frac{1854}{5040} \approx 36,79\%$	$+\infty$	$\frac{1}{e} \approx 36,79\%$

Meer info:

<https://www.youtube.com/watch?v=pbXg5EI5t4c> (Derangements - Numberphile)