



Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Verloop van exponentiële en logaritmische functies

1. Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.
 - a) ★ Bepaal het domein van deze functie.
 - b) ★ Stel het tekenverloop op van deze functie.
 - c) ★★ Bereken de limiet $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Wat kan je hieruit besluiten in verband met asymptoten?
 - d) ★★ Bereken de eerste afgeleide van de functie en bepaal de coördinaat van het minimum.
 - e) ★★ Bereken $L' = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Wat betekent dit voor de grafiek van de functie?
 - f) ★★★ Bereken de tweede afgeleide van de functie en bepaal de coördinaat van het buigpunt.
 - g) ★★★ Stel de vergelijking op van de buigraaklijn.
2. ★★ Bereken de coördinaat van het maximum van de functie $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 - e^x}$.
3. ★★★ Bereken de parameter $a \in \mathbb{R}$ zodat $r \leftrightarrow y = x$ een raaklijn is aan de grafiek van $f(x) = \frac{a + \ln x}{x^2}$.
4. ★ Bereken zonder rekenmachine
 - a) $e^{3 \cdot \ln 2}$
 - b) $\ln\left(\frac{e^{2a}}{\sqrt{e}}\right)$
5. ★★ Bereken zo efficiënt mogelijk de afgeleide functies:
 - a) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$
 - b) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$
6. ★★ Bereken de limieten, gebruik makend van standaardlimieten en de regel van l'Hôpital.
 - a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3 \ln x}{2x - 5 \ln x^2}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 8^x}{4x}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{1}{x-2}}$

7. ★★ Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$.

Bewijs dat de linker- en rechterlimiet van deze functie voor $x \rightarrow 0$ bestaan maar verschillend zijn.

8. ★★ Het alcoholgehalte $A(t)$ in bloed neemt af met de tijd t , volgens de formule: $A'(t) = -0,15 \cdot A(t)$.

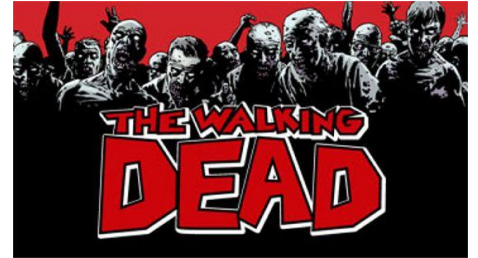
Hierbij is het alcoholgehalte gemeten in ‰ en de tijd in uur.

Marcel drinkt op korte tijd een grote hoeveelheid alcohol, waardoor hij om 18u 's avonds 1,2‰ alcohol in zijn bloed heeft. Hoe lang moet Marcel wachten vooraleer hij (wettelijk) met zijn auto naar huis mag rijden? Het wettelijke maximum alcoholgehalte in het bloed bedraagt 0,5‰.

9. ★★★ Door een compleet uit de hand gelopen medisch experiment verandert een groot deel van de mensen in zombies.

De grootte van de zombiëpopulatie kan beschreven worden door de functie:

$$Z(t) = 1 + 20 \cdot \frac{t^9}{e^t},$$



Hierbij is Z de hoeveelheid zombies in functie van de tijd t na het experiment in maanden.

Beantwoord kort volgende vraagjes met je rekenmachine:

- a) Bereken dat er na 1 maand nog altijd minder dan 10 zombies zijn.
- b) Hoeveel zombies zijn er echter al na 2 maanden?
- c) Bewijs dat er nooit meer dan een miljoen zombies zijn.

Bewijs de volgende drie beweringen zonder je rekenmachine:

- d) De zombiëpopulatie is het grootst na 9 maanden.
- e) De zombiëpopulatie neemt het snelst toe na 6 maanden.
- f) Na één jaar (12 maanden) neemt de zombiëpopulatie het snelste af.

Veel succes!

	a) $\text{dom } f = \mathbb{R}_0^+$ b) Tekenverloop: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$///$</td><td>$$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table> c) $L = 0$, er is dus geen V.A. voor $x \rightarrow 0$. 1. d) $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$ en $M\left(e^{-2}, \frac{-2}{e}\right)$ e) $L' = -\infty$, dus de grafiek zal in $x \rightarrow 0$ verticaal beginnen. f) $f''(x) = \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$ en $B(1, 0)$ g) $t \leftrightarrow y = x - 1$	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	$f(x)$	$///$	$ $	$-$	0	$+$
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$								
$f(x)$	$///$	$ $	$-$	0	$+$							
2.	$M(\ln 2, -4)$											
3.	$a = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 3$											
4.	a) 8 b) $2a - \frac{1}{2}$											
5.	a) $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^3 - 1}$ b) $f'(x) = \frac{(\ln x)^{\ln x}}{x} (\ln(\ln x) + 1)$											
6.	a) 2 b) $\frac{\ln 2 - \ln 8}{4} \left(= \ln \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \right)$ c) e^{-2}											
7.	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ en $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$											
8.	Marcel moet 5h50' wachten, dus hij mag pas naar huis rijden om 23u50.											
9.	a-b) functiewaarden berekenen. c) maximum berekenen. d-e-f) twee maal afleiden, nulpunten van de afgeleiden berekenen, en verloop bespreken.											