

1. Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

a) Bepaal het domein van deze functie.

$\text{dom } f = \mathbb{R}_0^+$ want enkel dan zijn zowel de vierkantswortel als de logaritme gedefinieerd.

b) Stel het tekenverloop op van deze functie.

$$\sqrt{x} \cdot \ln x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \vee \ln x = 0 \Leftrightarrow \cancel{x=0} \vee x=1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f(x)$	///		-	0	+

c) Bereken de limiet $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Wat kan je hieruit besluiten in verband met asymptoten?

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0, \text{ er is dus geen V.A. voor } x \rightarrow 0.$$

d) Bereken de eerste afgeleide van de functie en bepaal de coördinaat van het minimum.

$$f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Nulpunt: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

x	$-\infty$	0	e^{-2}	$+\infty$	Het minimum wordt bereikt als $x = e^{-2}$, dan is $y = \sqrt{e^{-2}} \cdot \ln e^{-2} = \frac{-2}{e}$. Dus minimum $M\left(e^{-2}, \frac{-2}{e}\right)$.
$f'(x)$	///		-	0	

e) Bereken $L' = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Wat betekent dit voor de grafiek van de functie?

$$L' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0^{(+)}} = -\infty, \text{ de grafiek zal in } x \rightarrow 0 \text{ verticaal beginnen.}$$

f) Bereken de tweede afgeleide van de functie en bepaal de coördinaat van het buigpunt.

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}} (\ln x + 2)}{4x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$$

$$\text{Nulpunt: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	Het buigpunt wordt bereikt als $x = 1$, dan is $y = 0$.	
$f''(x)$	///		+	0	-	Dus het buigpunt is $B(1,0)$.

g) Stel de vergelijking op van de buigraaklijn.

$$f'(1) = \frac{\ln 1 + 2}{2\sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1, \text{ dus } t \leftrightarrow y = x - 1.$$

2. Bereken de coördinaat van het maximum van de functie $f(x) = \frac{e^{2x}}{1-e^x}$.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot (1-e^x) + e^x \cdot e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^{2x} - 2e^{3x} + e^{3x}}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^{2x} - e^{3x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^{2x}(2-e^x)}{(1-e^x)^2}$$

$$\text{Nulpunt: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}(2-e^x)}{(1-e^x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$

Het maximum wordt bereikt als $x = \ln 2$, dan is

$$y = \frac{e^{2\ln 2}}{1-e^{\ln 2}} = \frac{2^2}{1-2} = -4.$$

Dus het maximum is $M(\ln 2, -4)$.

3. Bereken de parameter $a \in \mathbb{R}$ zodat $r \leftrightarrow y = x$ een raaklijn is aan de grafiek van $f(x) = \frac{a + \ln x}{x^2}$.

$$\text{De afgeleide functie is } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(a + \ln x)}{x^4} = \frac{x(1-2a-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2a-2\ln x}{x^3}.$$

Dus de rechte zal raken in het punt met x -coördinaat x_0 als en slechts als:

$$\begin{cases} f(x_0) = x_0 \\ f'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a + \ln x_0}{x_0^2} = x_0 \\ \frac{1-2a-2\ln x_0}{x_0^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \ln x_0 = x_0^3 \\ 1-2a-2\ln x_0 = x_0^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^3 - \ln x_0 \\ a = \frac{1-2\ln x_0 - x_0^3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{3} \\ a = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\ln 3 \end{cases}$$

$$\frac{1-2\ln x_0 - x_0^3}{2} = x_0^3 - \ln x_0 \Leftrightarrow \cancel{1-2\ln x_0} - x_0^3 = 2x_0^3 - \cancel{2\ln x_0} \Leftrightarrow 3x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{En dan is } a = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 - \ln \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\ln 3$$

4. Bereken zonder rekenmachine

a) $e^{3 \cdot \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$

b) $\ln\left(\frac{e^{2a}}{\sqrt{e}}\right) = \ln e^{2a} - \ln \sqrt{e} = 2a - \frac{1}{2}$

5. Bereken zo efficiënt mogelijk de afgeleide functies:

a) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{3}\ln(x^3-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{3} \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^3-1}$

b) $f(x) = (\ln x)^{\ln x} \Rightarrow f'(x) = (\ln x)^{\ln x} \cdot \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (\ln x)^{\ln x-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{(\ln x)^{\ln x} \cdot \ln(\ln x)}{x} + \frac{(\ln x)^{\ln x}}{x}$

$$= \frac{(\ln x)^{\ln x}}{x} (\ln(\ln x) + 1)$$

6. Bereken de limieten, gebruik makend van standaardlimieten en de regel van l'Hôpital.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3 \ln x}{2x - 5 \ln x^2} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{10 \ln x}{x}} \stackrel{[H]}{=} \frac{4}{2} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 8^x}{4x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot \ln 2 - 8^x \cdot \ln 8}{4} = \frac{\ln 2 - \ln 8}{4} \left(= \ln \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \right) \text{ (deze laatste stap is optioneel)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{1}{x-2}} = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow L = e^{-2}$$

$$\text{Alternatief: } \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{-2}{z}} = \left(\lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} \right)^{-2} = e^{-2}$$

Want $5 - 2x = 1 + z \Leftrightarrow x = 2 - \frac{z}{2}$ en dus ook als $x \rightarrow 2$, dan zal $z \rightarrow 0$

7. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$.

Bewijs dat de linker- en rechterlimiet van deze functie voor $x \rightarrow 0$ bestaan maar verschillend zijn.

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = \frac{1}{1 + 2^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = \frac{1}{1 + 2^{+\infty}} = \frac{1}{1 + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

De functie is vertoont dus een sprong (en is zeker niet continu want $f(0)$ is zelfs niet gedefinieerd).

8. Het alcoholgehalte $A(t)$ in bloed neemt af met de tijd t , volgens de formule: $A'(t) = -0,15 \cdot A(t)$. Hierbij is het alcoholgehalte gemeten in ‰ en de tijd in uur.

Marcel drinkt op korte tijd een grote hoeveelheid alcohol, waardoor hij om 18u 's avonds 1,2‰ alcohol in zijn bloed heeft. Hoe lang moet Marcel wachten vooraleer hij (wettelijk) met zijn auto naar huis mag rijden? Het wettelijke maximum alcoholgehalte in het bloed bedraagt 0,5‰.

$$A'(t) = -0,15 \cdot A(t) \Rightarrow A(t) = b \cdot e^{-0,15t} = 1,2 \cdot e^{-0,15t} \text{ (stellen we } t = 0 \text{ op 18u, dan zal } A(0) = b = 1,2)$$

$$A(t) = 0,5 \Leftrightarrow 1,2 \cdot e^{-0,15t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,15t} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow -0,15t = \ln \frac{5}{12} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{5}{12}}{-0,15} \approx 5,8365 \approx 5h 50m$$

Antw.: Marcel moet wachten tot 23u50 voor hij wettelijk gezien naar huis mag rijden.

10. Door een compleet uit de hand gelopen medisch experiment verandert een groot deel van de mensen in zombies.

De grootte van de zombiepopulatie kan beschreven worden door de functie:

$$Z(t) = 1 + 20 \cdot \frac{t^9}{e^t},$$

Hierbij is Z de hoeveelheid zombies in functie van de tijd t na het experiment in maanden.

Beantwoord kort volgende vraagjes met je rekenmachine (rond altijd af op de eenheid):

a) Bereken dat er na 1 maand nog altijd minder dan 10 zombies zijn.

$$Z(1) = 1 + 20 \cdot \frac{1^9}{e^1} = 1 + \frac{20}{e} \approx 8 < 10$$

b) Hoeveel zombies zijn er echter al na 2 maanden?

$$Z(2) = 1 + 20 \cdot \frac{2^9}{e^2} = 1 + \frac{10240}{e^2} \approx 1387$$

c) Bewijs dat er nooit meer dan een miljoen zombies zijn.

Het maximum dat je vindt (met je GRM) is ongeveer 956230. Dit is net minder dan een miljoen.

Bewijs de volgende drie beweringen zonder je rekenmachine:

d) De zombiepopulatie is het grootst na 9 maanden.

$$Z'(t) = 0 + 20 \cdot \frac{9t^8 \cdot e^t - e^t \cdot t^9}{e^{2t}} = 20 \cdot \frac{\cancel{e^t} \cdot t^8 (9-t)}{e^{\cancel{t}t}} = 20 \cdot \frac{t^8 (9-t)}{e^t} \left(= 20 \cdot \frac{9t^8 - t^9}{e^t} \right)$$

Makkelijk om nog eens af te leiden

$$\text{Nulpunten: } Z'(t) = 0 \Leftrightarrow 20 \cdot \frac{t^8 (9-t)}{e^t} = 0 \Leftrightarrow t^8 = 0 \vee 9-t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 9$$

t	$-\infty$	0		9	$+\infty$
$Z'(t)$	+	0	+	0	-

Het maximum wordt dus inderdaad bereikt als $t = 9$.

e) De zombiepopulatie neemt het snelst toe na 6 maanden.

$$Z''(t) = 20 \cdot \frac{(72t^7 - 9t^8) \cdot e^t - e^t \cdot (9t^8 - t^9)}{e^{2t}} = 20 \cdot \frac{\cancel{e^t} \cdot t^7 (t^2 - 18t + 72)}{e^{\cancel{t}t}} = 20 \cdot \frac{t^7 (t^2 - 18t + 72)}{e^t}$$

t	$-\infty$	0		6		12	$+\infty$
$Z''(t)$	-	0	+	0	-	0	+

Er zijn dus twee buigpunten, van hol naar bol na 6 maanden, en van bol naar hol na 12 maanden.

De snelheid waarmee de zombiepopulatie toeneemt is dus effectief maximaal na 6 maanden, en de snelheid waarmee ze afneemt maximaal na 12 maanden.

f) Na één jaar (12 maanden) neemt de zombiepopulatie het snelste af.

Zie vorige vraag.