

1. ★★ Bewijs dat de raaklijn in punt $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ aan de grafiek van de functie $f(x) = \ln(\text{Bgsin } x)$ evenwijdig

is aan de rechte $r \leftrightarrow 6x - \pi y = 0$. De rico van rechte r is $m_r = 6/\pi$.

$$f'(x) = \frac{1/\sqrt{1-x^2}}{\text{Bgsin } x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \text{Bgsin } x} \Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot \text{Bgsin } \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}} = \frac{6}{\pi} \cdot \square$$

2. Bereken de volgende limieten:

a) ★★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2 \sin x \cos x} \stackrel{[H]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cos^2 x} = -\frac{1}{2}$

b) ★★ $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{-\pi/2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}} = -\frac{2}{\pi}$

c) ★★★ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = L = e^{\ln L} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$* : \ln L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\tan^2 x \cdot \ln(\sin x) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cot^2 x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2 \cot x \frac{-1}{\sin^2 x}} = -\frac{1}{2}$$

3. ★★ Op de figuur zie je een periode getekend van de functie $f(x) = \sec x + \csc x$.

- Bespreek in een tabel het stijgen en dalen van deze functie met behulp van de eerste afgeleide.

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$$

$$\text{Nulpunten: } \sin^3 x = \cos^3 x \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

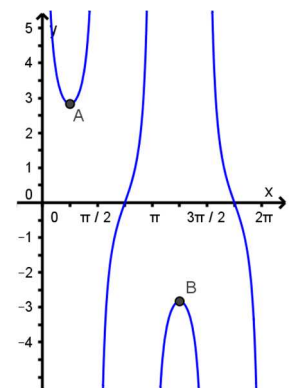
$$\text{Polen: } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ en } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Bespreken we het verloop in één periode $[0, 2\pi[$, dan krijgen we:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	2π
$f'(x)$		-	0	+		+	
$f(x)$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX

- Bereken de coördinaten van het lokale minimum A en het lokale maximum B .

$$f(\pi/4) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ en } f(5\pi/4) = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{-2}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}, \text{ dus } A\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right) \text{ en } B\left(\frac{5\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right).$$



4. ★★ Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \text{Bgtan } x$ geen buigpunten heeft.

$$f'(x) = \text{Bgtan } x + \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

f heeft geen buigpunten want de tweede afgeleide heeft geen nulpunten.

5. ★★ De lengte van een dag (het aantal uren zonlicht) wordt gegeven door:

$$L(t) = 4,5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) + 12, \text{ met } t \text{ gemeten in dagen na 1 januari en } L \text{ gemeten in uren.}$$

- a) Reken snel even na dat $t = 80$ overeenkomt met 21 maart.

Januari telt 31 dagen, februari 28, dus 21 maart is de 80^e dag van het jaar.

- b) Hoeveel uren daglicht zijn er op 21 maart? Kan je dit wetenschappelijk verklaren?

$L(80) = 4,5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}(80-80)\right) + 12 = 12$. Er zijn dan 12 uren daglicht (en 12 uren nacht). Bij het begin van de lente is de dag even lang als de nacht. We noemen dit een [equinox](#).

- c) Bereken de snelheid $L'(t)$ waarmee het uren daglicht toeneemt.

$$L'(t) = 4,5 \cdot \frac{2\pi}{365} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$$

- d) Wat is de langste dag van het jaar? Hoeveel uren zonlicht zijn er dan?

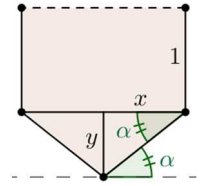
Dit is als $\frac{2\pi}{365}(t-80) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 171,25$ (± 20 juni), er zijn dan 16,5 uren zonlicht.

- e) Op welke dag neemt het aantal uren daglicht het sterkst toe? Met hoeveel minuten per dag is dit dan?

Dan moet $L''(t) = 0$. Je kan narekenen dat dit weer is als $t = 80$. De snelheid (in uren daglicht per dag) is dan:

$$L'(80) = 4,5 \cdot \frac{2\pi}{365} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365}(80-80)\right) = \frac{9\pi}{365} \approx 0,077, \text{ dit zijn ongeveer } 4,64 \text{ minuten per dag extra.}$$

6. ★★★ Een symmetrische dakgoot wordt gevormd door Een ijzeren plaat van 4 dm breed te plooiën zoals op de figuur hiernaast. De goot is vanboven open en heeft twee evenwijdige wanden.



- Als de hellingshoek α is (zie figuur), bewijs dan dat de oppervlakte van een dwarsdoorsnede gegeven wordt door $S = 2 \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$.

Op de figuur zien we dat $\cos \alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos \alpha$ en $\sin \alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin \alpha$.

De oppervlakte is dan $S = S_{\square} + S_{\Delta} = 1 \cdot 2x + \frac{2x \cdot y}{2} = 2 \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha$.

- Bewijs dat de inhoud (of dus de dwarsdoorsnede) van de goot maximaal is als $\alpha = \text{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

$$\frac{dS}{d\alpha} = -2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha - 2 \sin^2 \alpha.$$

Om de nulpunten te zoeken lossen we de vierkantsvergelijking in $\sin \alpha$ op, met $\Delta = 12$:

$$-2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \vee \sin \alpha = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Stel $x_1 = \text{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, dan wordt het tekenverloop in het praktische domein $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

x	0		x_1		$\pi/2$
$dS/d\alpha$	1	+	0	-	-3
S		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

De functie bereikt dus wel degelijk haar maximum als $\alpha = \text{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

Merk op dat het andere nulpunt van de eerste afgeleide $x_2 = \pi - \text{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ niet in het praktische domein zit en dus buiten beschouwing wordt gelaten.