Oplossingen

1. ★★⋆ Op een ellips $\mathcal{E}$ neem je twee vaste punten P en Q en een veranderlijk punt R. De middelloodlijnen van $[PR]$ en $[QR]$ snijden de grote as van $\mathcal{E}$ in respectievelijk U en V. Bewijs dat de vector $\overrightarrow{UV}$ een constante vector is (dus onafhankelijk van de keuze van R).

Noem $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $Q(a\cos\beta, b\sin\beta)$ en $R(a\cos\theta, b\sin\theta)$.

De rico van PR is $m_{PR}=\frac{b(\sin\theta-\sin\alpha)}{a(\cos\theta-\cos\alpha)}$ en het midden van $[PR]$ is $M\left(\frac{a}{2}(\cos\theta+\cos\alpha),\frac{b}{2}(\sin\theta+\sin\alpha)\right)$

De middelloodlijn van $[PR]$ is $l_1 \leftrightarrow y=-\frac{a(\cos\theta-\cos\alpha)}{b(\sin\theta-\sin\alpha)}\cdot\left(x-\frac{a}{2}(\cos\theta+\cos\alpha)\right)+\frac{b}{2}(\sin\theta+\sin\alpha)$.

Voor het snijpunt met de grote as $(y=0)$ geldt dan:

$$x=\frac{b^2}{2a}\frac{(\sin\theta+\sin\alpha)\cdot(\sin\theta-\sin\alpha)}{\cos\theta-\cos\alpha}+\frac{a}{2}(\cos\theta+\cos\alpha)=\frac{b^2}{2a}\frac{(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)}{\cos\theta-\cos\alpha}+\frac{a}{2}(\cos\theta+\cos\alpha)$$

$$=-\frac{b^2}{2a}\frac{(\cos^2\theta-\cos^2\alpha)}{\cos\theta-\cos\alpha}+\frac{a}{2}(\cos\theta+\cos\alpha) \quad \textit{want } \sin^2\theta-\sin^2\alpha=(1-\cos^2\theta)-(1-\cos^2\alpha)=-(\cos^2\theta-\cos^2\alpha)$$

$$=-\frac{b^2}{2a}\frac{\cancel{(\cos\theta-\cos\alpha)}(\cos\theta+\cos\alpha)}{\cancel{\cos\theta-\cos\alpha}}+\frac{a}{2}(\cos\theta+\cos\alpha)=\frac{(a^2-b^2)}{2a}(\cos\theta+\cos\alpha)$$

Dus is $U\left(\frac{a^2-b^2}{2a}(\cos\theta+\cos\alpha),0\right)$ en analoog is $V\left(\frac{a^2-b^2}{2a}(\cos\theta+\cos\beta),0\right)$, zodat we vinden dat:

$\overrightarrow{UV}=\vec{V}-\vec{U}=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}(\cos\beta-\cos\alpha),0\right)$, dit is onafhankelijk van θ (en dus van de keuze van R). □

2. ★★ Welke ellips (betrokken op haar assen) raakt de rechten $t_1 \leftrightarrow 5x+2y+9=0$ en $t_2 \leftrightarrow x+2y-3=0$?

Noem $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, of dus nog $\mathcal{E} \leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Als t_1 een raaklijn is dan wil dat zeggen dat de vergelijking $b^2x^2+a^2\left(\frac{-5x-9}{2}\right)^2=a^2b^2$ maar één oplossing heeft. Vereenvoudigen geeft:

$$b^2x^2+a^2\left(\frac{25}{4}x^2+\frac{45}{2}x+\frac{81}{4}\right)=a^2b^2 \Leftrightarrow (4b^2+25a^2)x^2+90a^2x+81a^2-4a^2b^2=0$$

Deze vgl. heeft maar één oplossing als en slechts als (rekening houdend met $a\neq 0$ en $b\neq 0$):

$$(90a^2)^2-4.(4b^2+25a^2).(81a^2-4a^2b^2)=0 \Leftrightarrow -1296a^2b^2+64a^2b^4+400a^4b^2=0 \Leftrightarrow 25a^2+4b^2-81=0.$$

Analoog zal t_2 de ellips raken als $b^2(-2y+3)^2+a^2y^2=a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2+4b^2)y^2-12b^2y+9b^2-a^2b^2=0$ maar één oplossing heeft, dus als en slechts als $(-12b^2)^2-4.(a^2+4b^2)(9b^2-a^2b^2)=0 \overset{\dots}{\Leftrightarrow} a^2+4b^2-9=0$.

We hebben dus dat $\begin{cases}25a^2+4b^2-81=0\\ a^2+4b^2-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=3\\ b^2=3/2\end{cases}$, zodat $\mathcal{E} \leftrightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1$.

3. ★★* Het punt $P(x_1,y_1)$ ligt op de ellips $\mathcal{E} \leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, met brandpunten F_1 en F_2.

Bewijs dat $|PF_1| = a-\dfrac{c}{a}x_1$ en $|PF_2| = a+\dfrac{c}{a}x_1$ (of omgekeerd).

Omdat $P(x_1,y_1)\in\mathcal{E}$ geldt dat $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y_1^2 = b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_1^2$

$$|PF_1| = \sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2} = \sqrt{x_1^2-2cx_1+c^2+y_1^2} = \sqrt{x_1^2-2cx_1+a^2\cancel{-b^2}\cancel{+b^2}-\frac{b^2}{a^2}x_1^2} \overset{*}{\underset{**}{=}} a-\frac{c}{a}x_1\text{, omdat:}$$

enerzijds $*$: $\left(a-\dfrac{c}{a}x_1\right)^2 = a^2-2cx_1+\dfrac{c^2}{a^2}x_1^2 = a^2-2cx_1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x_1^2 = a^2-2cx_1+x_1^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_1^2$, en

anderzijds $**$: $\begin{cases}0<c<a\\ -a\le x_1\le a\end{cases} \Rightarrow cx_1<a^2 \Rightarrow \dfrac{c}{a}x_1<a \Rightarrow a-\dfrac{c}{a}x_1>0$.

4. ★★★ Op een ellips $\mathcal{E}$ liggen twee (verschillende) punten P_1 en P_2 waarin de raaklijnen aan $\mathcal{E}$ elkaar snijden in T. Bewijs dat T collineair is met het midden M van $[P_1P_2]$ en het middelpunt van $\mathcal{E}$.

Noem $P_1(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ en $P_2(a\cos\beta, b\sin\beta)$ dan vinden we voor het snijpunt van de raaklijnen:

$$T:\begin{cases}\dfrac{x\cos\alpha}{a}+\dfrac{y\sin\alpha}{b}=1\\[2mm] \dfrac{x\cos\beta}{a}+\dfrac{y\sin\beta}{b}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha)=a(\sin\beta-\sin\alpha)\\ y(\cos\beta\sin\alpha-\cos\alpha\sin\beta)=b(\cos\beta-\cos\alpha)\end{cases}$$

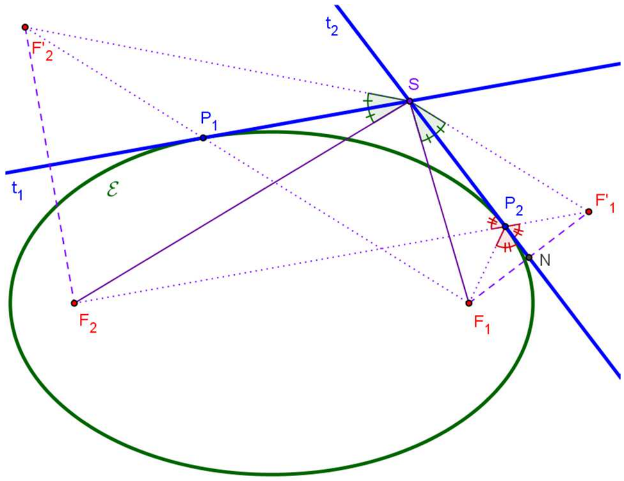
$$\Rightarrow T\left(\frac{a(\sin\beta-\sin\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}, -\frac{b(\cos\beta-\cos\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}\right)$$

Het midden M heeft als coördinaat $\left(\dfrac{a}{2}(\cos\alpha+\cos\beta), \dfrac{b}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\right)$.

We rekenen met de determinant na dat de punten O, M en T collineair zijn:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ \dfrac{a}{2}(\cos\alpha+\cos\beta) & \dfrac{b}{2}(\sin\alpha+\sin\beta) & 1\\ \dfrac{a(\sin\beta-\sin\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} & -\dfrac{b(\cos\beta-\cos\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} & 1\end{vmatrix} = \frac{-ab(\cos^2\beta-\cos^2\alpha)}{2}-\frac{ab(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}{2} = \frac{ab}{2}(1-1)=0 \ \square$$

5. Gegeven is een ellips $\mathcal{E}$ met brandpunten F_1 en F_2 en twee willekeurig raaklijnen t_1 en t_2 in de punten $P_1, P_2 \in \mathcal{E}$ die elkaar snijden in S.



a) ★ Noem $F_1^{'}$ het spiegelbeeld van F_1 om de raaklijn t_2. Bewijs dat F_2, P_2 en $F_1^{'}$ collineair zijn, en dat $\left|F_2F_1^{'}\right| = 2a$ (= de lengte van de grote as van de ellips).

Noem N het snijpunt van $F_1F_1^{'}$ met de raaklijn t_2, dan geldt enerzijds dat $\widehat{F_1P_2N} = \widehat{F_1^{'}P_2N}$ (omdat $F_1^{'}$ het spiegelbeeld is van F_1 om t_2), en anderzijds impliceert de hoofdstelling dat $\widehat{SP_2F_2} = \widehat{F_1P_2N}$. Hieruit volgt dus dat $\widehat{F_1^{'}P_2N} = \widehat{SP_2F_2}$ wat inderdaad wil zeggen dat F_2, P_2 en $F_1^{'}$ collineair zijn (overstaande hoeken zijn gelijk).

Verder is uiteraard $\left|F_2F_1^{'}\right| = \left|F_2P_2\right| + \left|P_2F_1^{'}\right| = \left|F_2P_2\right| + \left|P_2F_1\right| = 2a$ (per definitie van de ellips).

b) ★★★⋆ Bewijs dat $\widehat{P_2SF_1} = \widehat{P_1SF_2}$.

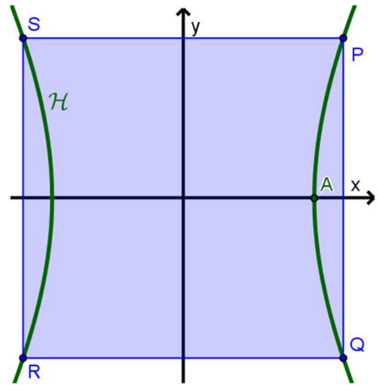
Uit het voorgaande volgt analoog dat $\left|F_1F_2^{'}\right| = 2a$.

Omdat $F_1^{'}$ en $F_2^{'}$ de spiegelbeelden zijn van F_1 en F_2 om respectievelijk t_2 en t_1 geldt uiteraard ook dat $\left|SF_1^{'}\right| = \left|SF_1\right|$ en $\left|SF_2^{'}\right| = \left|SF_2\right|$, en dat $\widehat{F_2^{'}SP_1} = \widehat{P_1SF_2}$ en $\widehat{F_1^{'}SP_2} = \widehat{P_2SF_1}$.

Wegens het congruentiekenmerk ZZZ geldt dus $\Delta F_1SF_2^{'} \cong \Delta F_2SF_1^{'}$, waaruit het gestelde volgt:

$$\widehat{F_1SF_2^{'}} = \widehat{F_2SF_1^{'}} \Leftrightarrow \widehat{F_1SF_2^{'}} - \widehat{F_2SF_1} = \widehat{F_2SF_1^{'}} - \widehat{F_2SF_1} \Leftrightarrow \widehat{F_2SF_2^{'}} = \widehat{F_1SF_1^{'}} \overset{:2}{\Leftrightarrow} \widehat{P_2SF_1} = \widehat{P_1SF_2} \quad \square$$

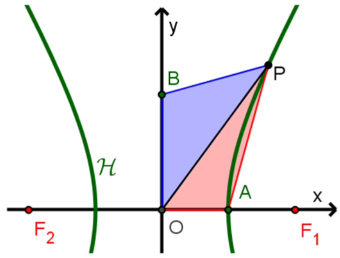
6. ★⋆ Gegeven is de hyperbool $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bepaal, indien mogelijk, op $\mathcal{H}$ vier punten die de hoekpunten zijn van een vierkant met zijden die evenwijdig zijn met de assen van $\mathcal{H}$. Is dit altijd mogelijk?



Het vierkant moet sowieso symmetrisch zijn om de oorsprong. De hoekpunten moeten dus als coördinaten hebben $P(p,p)$, $Q(p,-p)$, $R(-p,-p)$ en $S(-p,p)$.

Opdat deze punten op de hyperbool zouden liggen moet $\frac{p^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow p^2 = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$. Het is dus enkel mogelijk indien $b > a$ en in dat geval zal $p = \frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

7. ★* Gegeven is de hyperbool $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Neem de punten $A(a,0)$, $B(0,b)$ en een willekeurig punt $P \in \mathcal{H}$. Bewijs dat het verschil van de kwadraten van de oppervlaktes van ΔOAP en ΔOBP een constante is.

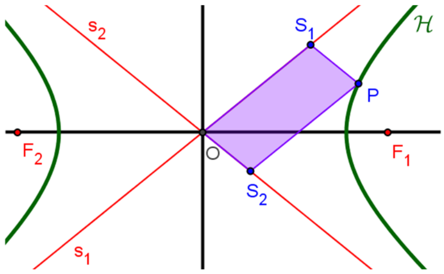


Noem $P(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$, dan geldt voor de driehoeken:

$$S_{\Delta OAP} = \frac{|OA| \cdot y_P}{2} = \frac{a \cdot b\tan\alpha}{2} \text{ en } S_{\Delta OBP} = \frac{|OB| \cdot x_P}{2} = \frac{b \cdot a\sec\alpha}{2},$$

Zodat $S^2_{\Delta OBP} - S^2_{\Delta OAP} = \frac{b^2 \cdot a^2 \sec^2\alpha}{4} - \frac{a^2 \cdot b^2 \tan^2\alpha}{4} = \frac{a^2b^2}{4}\left(\sec^2\alpha - \tan^2\alpha\right) = \frac{a^2b^2}{4}$

8. ★★* Op een hyperbool $\mathcal{H}$ neem je een veranderlijk punt P. De rechten door P evenwijdig met de asymptoten vormen samen met de asymptoten een parallellogram. Bewijs dat de oppervlakte van dit parallellogram gelijk is aan een achtste van de oppervlakte van de assenrechthoek.



Neem $\mathcal{H} \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en stel $P(a\sec\alpha, b\tan\alpha) \in \mathcal{H}$. De asymptoten van $\mathcal{H}$ zijn $s_2 \leftrightarrow bx + ay = 0$ en $s_1 \leftrightarrow bx - ay = 0$.

Neem $S_1 \in s_1$ zodat $PS_1 // s_2$ en $S_2 \in s_2$ zodat $PS_2 // s_1$

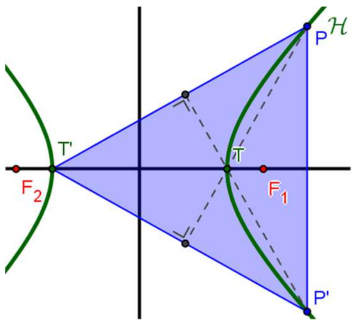
Dan geldt $PS_1 \leftrightarrow b(x - a\sec\alpha) + a(y - b\tan\alpha) = 0$, of nog: $PS_1 \leftrightarrow bx + ay = ab(\sec\alpha + \tan\alpha)$.

Het snijpunt S_1 van PS_1 en s_1 is $S_1 : \begin{cases} r_1 \leftrightarrow bx + ay = ab(\sec\alpha + \tan\alpha) \\ s_1 \leftrightarrow bx - ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2}(\sec\alpha + \tan\alpha) \\ y = \frac{b}{2}(\sec\alpha + \tan\alpha) \end{cases}$.

De oppervlakte van $\square OS_1PS_2$ is dus gelijk aan: $S_\square = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ a\sec\alpha & b\tan\alpha & 1 \\ a(\sec\alpha + \tan\alpha)/2 & b(\sec\alpha + \tan\alpha)/2 & 1 \end{matrix} \right\|$

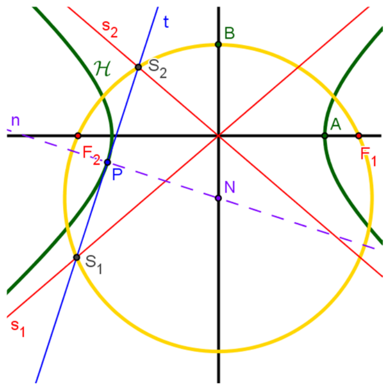
$$\Rightarrow S_\square = \left| \frac{ab}{2}\sec\alpha(\sec\alpha + \tan\alpha) - \frac{ab}{2}\tan\alpha(\sec\alpha + \tan\alpha) \right| = \frac{ab}{2}\left|\sec^2\alpha - \tan^2\alpha\right| = \frac{ab}{2} = \frac{2a \cdot 2b}{8}$$

9. ★★ Op een gelijkzijdige hyperbool $\mathcal{H}$ met toppen T en T' neem je een willekeurig punt P. Noem P' het spiegelbeeld van P om de as TT'. Bewijs dat T het hoogtepunt is van de driehoek $\Delta PT'P'$.



Neem $\mathcal{H} \leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$, dan is $T(a,0)$ en $T'(-a,0)$. Stel $P(a\sec\alpha, a\tan\alpha)$ dan is $P'(a\sec\alpha, -a\tan\alpha)$. Dat in driehoek $\Delta PT'P'$ de hoogtelijn uit PP' door T gaat is evident (dit is e x-as). We controleren nu dat ook de hoogtelijn uit P' door T gaat. Daarvoor volstaat het te controleren dat $PT \perp P'T'$:

$$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{P'T'}=\left(\overline{T}-\overline{P}\right)\cdot\left(\overline{T'}-\overline{P'}\right)=\left(a-a\sec\alpha\right)\cdot\left(-a-a\sec\alpha\right)+\left(0-a\tan\alpha\right)\cdot\left(0+a\tan\alpha\right)$$
$$=a^2\sec^2\alpha-a^2-a^2\tan^2\alpha=a^2\left(\sec^2\alpha-1-\tan^2\alpha\right)=0 \ \square$$



10. De punten S_1 en S_2 zijn de snijpunten van de raaklijn t aan een hyperbool $\mathcal{H}$ in een willekeurig punt P met de asymptoten van $\mathcal{H}$.

a) ★★ Bewijs dat P het midden is van $\left[S_1S_2\right]$.

Neem $\mathcal{H}\leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ en stel $P\left(a\sec\alpha,b\tan\alpha\right)$. De asymptoten van $\mathcal{H}$ zijn $s_1\leftrightarrow bx-ay=0$ en $s_2\leftrightarrow bx+ay=0$.

De raaklijn in P is $t\leftrightarrow\dfrac{x\sec\alpha}{a}-\dfrac{y\tan\alpha}{\beta}=1$, het snijpunt S_1 wordt gegeven

door: $\begin{cases}bx\sec\alpha-ay\tan\alpha=ab\\ bx-ay=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bx\sec\alpha-bx\tan\alpha=ab\\ bx=ay\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{ab}{b\left(\sec\alpha-\tan\alpha\right)}=\dfrac{a\cos\alpha}{\left(1-\sin\alpha\right)}\\ y=\dfrac{b}{\left(\sec\alpha-\tan\alpha\right)}=\dfrac{b\cos\alpha}{\left(1-\sin\alpha\right)}\end{cases}$.

Dus $S_1\left(\dfrac{a\cos\alpha}{\left(1-\sin\alpha\right)},\dfrac{b\cos\alpha}{\left(1-\sin\alpha\right)}\right)$ en analoog vind je $S_2\left(\dfrac{a\cos\alpha}{\left(1+\sin\alpha\right)},\dfrac{-b\cos\alpha}{\left(1+\sin\alpha\right)}\right)$.

Voor het midden M geldt:

$$x_M=\frac{\dfrac{a\cos\alpha}{\left(1-\sin\alpha\right)}+\dfrac{a\cos\alpha}{\left(1+\sin\alpha\right)}}{2}=\frac{a\cos\alpha\left(1+\cancel{\sin\alpha}+1-\cancel{\sin\alpha}\right)}{2\left(1-\sin\alpha\right)\left(1+\sin\alpha\right)}=\frac{2a\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=a\sec\alpha$$

en $$y_M=\frac{\dfrac{b\cos\alpha}{\left(1-\sin\alpha\right)}-\dfrac{b\cos\alpha}{\left(1+\sin\alpha\right)}}{2}=\frac{b\cos\alpha\left(\cancel{1}+\sin\alpha-\cancel{1}+\sin\alpha\right)}{2\left(1-\sin\alpha\right)\left(1+\sin\alpha\right)}=\frac{2b\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}=b\tan\alpha \quad \square$$

b) ★★★* Bewijs dat de punten S_1 en S_2 concyclisch zijn met de brandpunten F_1 en F_2 van $\mathcal{H}$.

Noem N het snijpunt van de middelloodlijnen van $\left[F_1F_2\right]$ (de y-as) en $\left[S_1S_2\right]$ (de normaal in P aan $\mathcal{H}$), dan geldt automatisch al dat $\left|NF_1\right|=\left|NF_2\right|$ en $\left|NS_1\right|=\left|NS_2\right|$. Als we dan nog kunnen bewijzen dat ook $\left|NF_1\right|=\left|NS_1\right|$ dan is het gestelde bewezen.

De normaal n in P heeft als vergelijking: $a\tan\alpha\left(x-a\sec\alpha\right)+b\sec\alpha\left(y-b\tan\alpha\right)=0$.

Voor het snijpunt N met de y-as geldt dus:

$$a\tan\alpha\left(-a\sec\alpha\right)+b\sec\alpha\left(y-b\tan\alpha\right)=0\Leftrightarrow y=\frac{a^2\sec\alpha\tan\alpha+b^2\sec\alpha\tan\alpha}{b\sec\alpha}=\frac{c^2\tan\alpha}{b},$$

zodat $N\left(0,\dfrac{c^2\tan\alpha}{b}\right)$.

Dan is $\left|NF_1\right| = \sqrt{c^2 + \left(\frac{c^2 \tan\alpha}{b}\right)^2}$ en $\left|NS_1\right| = \sqrt{\left(\frac{a\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{b\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)} - \frac{c^2\tan\alpha}{b}\right)^2}$

We herleiden de te bewijzen gelijkheid $\left|NF_1\right| = \left|NS_1\right|{}^*$:

$$* \Leftrightarrow c^2 + \left(\frac{c^2 \tan\alpha}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{b\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)} - \frac{c^2\tan\alpha}{b}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 + \cancel{\left(\frac{c^2 \tan\alpha}{b}\right)^2} = \frac{a^2\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} + \frac{b^2\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} - 2\frac{\cancel{b}\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)}\frac{c^2\tan\alpha}{\cancel{b}} + \cancel{\left(\frac{c^2\tan\alpha}{b}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{c^2} = \frac{\cancel{c^2}\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} - 2\frac{\cancel{c^2}\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)} \Leftrightarrow 1 = \frac{\cos^2\alpha - 2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1-\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 2\sin^2\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{\cancel{(1-\sin\alpha)^2}}{\cancel{(1-\sin\alpha)^2}} \Leftrightarrow 1 = 1 \;\square$$