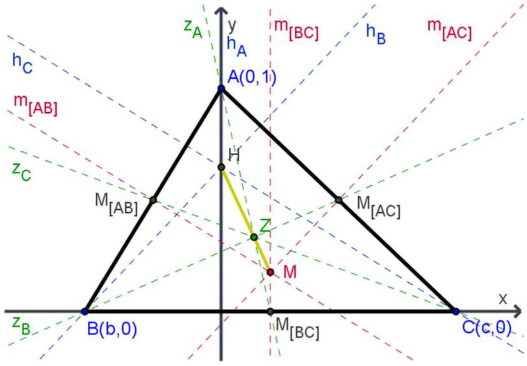
<u>*Oplossingen*</u>

1. ★★★ Bewijs de volgende stellingen:



a) De drie zwaartelijnen in een driehoek zijn concurrent. Hun snijpunt heet het zwaartepunt Z van de driehoek.
We stellen $A(0,1)$, $B(b,0)$ en $C(c,0)$, met $b \neq c$.
De middens zijn $M_{[AB]}\left(\dfrac{b}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $M_{[AC]}\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ en $M_{[BC]}\left(\dfrac{b+c}{2},0\right)$.

De vergelijkingen van de zwaartelijnen zijn:

$$z_A \leftrightarrow y=\frac{-2}{b+c}x+1 \; ; \qquad z_B \leftrightarrow y=\frac{1}{c-2b}(x-b) \; ; \qquad z_C \leftrightarrow y=\frac{1}{b-2c}(x-c)$$

Deze rechten snijden elkaar in het zwaartepunt $Z\left(\dfrac{b+c}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

b) De drie hoogtelijnen in een driehoek zijn concurrent. Hun snijpunt heet het hoogtepunt H van de driehoek.
De rico's van de zijden zijn $m_{AB}=-\dfrac{1}{b}$, $m_{AC}=-\dfrac{1}{c}$ en $m_{BC}=0$.

De vergelijkingen van de hoogtelijnen zijn :

$$h_A \leftrightarrow x=0 \; ; \qquad h_B \leftrightarrow y=c(x-b) \; ; \qquad h_C \leftrightarrow y=b(x-c)$$

Deze rechten snijden elkaar in het hoogtepunt $H(0,-bc)$.

c) De drie middelloodlijnen in een driehoek zijn concurrent. Het snijpunt is het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van de driehoek.
De vergelijkingen van de middelloodlijnen zijn :

$$m_{[AB]} \leftrightarrow y=b\left(x-\frac{b}{2}\right)+\frac{1}{2} \; ; \qquad m_{[AC]} \leftrightarrow y=c\left(x-\frac{c}{2}\right)+\frac{1}{2} \; ; \qquad m_{[BC]} \leftrightarrow x=\frac{b+c}{2}$$

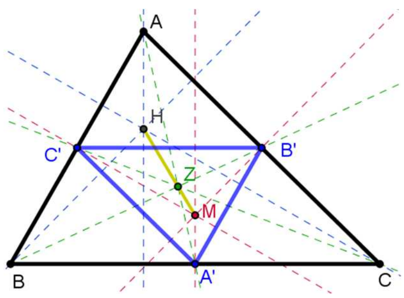
Deze rechten snijden elkaar in het punt $M\left(\dfrac{b+c}{2},\dfrac{bc+1}{2}\right)$.

d) De drie punten Z, H en M zijn collineair. De rechte waar ze op liggen wordt de rechte van Euler genoemd.
De vergelijking van de rechte is $ZM \leftrightarrow y=\dfrac{3bc-1}{b+c}x-bc$ en uiteraard ligt H hierop.

e) Voor de afstanden geldt: $|ZH|=2.|MZ|$.

$$|MZ|=\frac{1}{6}\sqrt{b^2+c^2+9b^2c^2+8bc+1}\,,\ |ZH|=\frac{1}{3}\sqrt{b^2+c^2+9b^2c^2+8bc+1} \Rightarrow |ZH|=2.|MZ|$$

<u>Als toemaatje: ***een meetkundig bewijs van de stelling van Euler***</u>



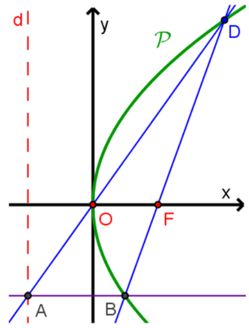
Beschouw de homothetie met centrum Z en factor $-1/2$.

Deze beeldt driehoek ΔABC af of de mediale driehoek $\Delta A'B'C'$.

De hoogtelijnen van driehoek ΔABC worden afgebeeld op de middelloodlijnen van ΔABC die tevens de hoogtelijnen zijn van de mediale driehoek $\Delta A'B'C'$.

Het beeld van H onder de homothetie is M, dus de punten H, Z en M zijn collineair en er geldt $|ZH|=2.|MZ|$. □

2. ★★★ Op een parabool $\mathcal{P}$ met top O, as s en brandpunt F beschouw je een punt $D \neq O$. De rechte DO snijdt de richtlijn van $\mathcal{P}$ in A. De rechte DF snijdt $\mathcal{P}$ een tweede keer in B. Bewijs dat $AB // s$.



Stel $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$, dan is $O(0,0)$, $s \leftrightarrow y = 0$ en $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

Noem $D\left(2p\lambda^2, 2p\lambda\right)$, met $\lambda \in \mathbb{R}_0$.

$DO \leftrightarrow y = \frac{2p\lambda}{2p\lambda^2}\cdot x \Leftrightarrow y = \frac{1}{\lambda}\cdot x$. Het snijpunt met de richtlijn ($d \leftrightarrow x = -\frac{p}{2}$) is dan $A\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p}{2\lambda}\right)$.

Voor DF werken we met een parametervoorstelling (zo omzeilen we de moeilijkheid als $DF // y$):

$DF \leftrightarrow \begin{cases} x = k\cdot\left(2p\lambda^2 - p/2\right) + p/2 \\ y = k\cdot 2p\lambda \end{cases}$. De snijpunten van DF met de parabool $\mathcal{P}$ vinden we door in te vullen:

$$\left(k\cdot 2p\lambda\right)^2 = 2p\left(k\cdot\left(2p\lambda^2 - p/2\right) + p/2\right) \Leftrightarrow 4p^2\lambda^2k^2 - \left(4p^2\lambda^2 - p^2\right)k - p^2 = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} k = 1 \vee k = -\frac{1}{4\lambda^2}$$

$$*: \Delta = \left(4p^2\lambda^2 - p^2\right)^2 + 4\cdot\left(\ 4p^2\lambda^2\right)\cdot p^2 = 16p^4\lambda^4 + 8p^4\lambda^2 + p^4 \cancel{+16p^4\lambda^2} = \left(4p^2\lambda^2 + p^2\right)^2$$

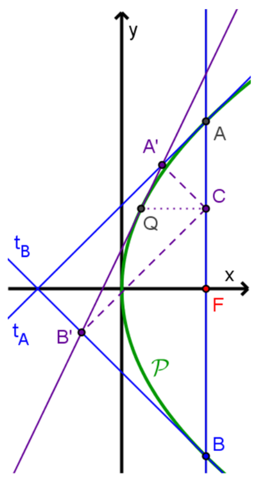
$$k = \frac{\left(4p^2\lambda^2 - p^2\right) \pm \left(4p^2\lambda^2 + p^2\right)}{8p^2\lambda^2} \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -\frac{1}{4\lambda^2}$$

Met $k = 1$ komt punt D overeen.

Het tweede snijpunt is $k = -\frac{1}{4\lambda^2} \Rightarrow B \leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4\lambda^2}\cdot\left(2p\lambda^2 - p/2\right) + p/2 = -\frac{p}{2} + \frac{p}{8\lambda^2} + \frac{p}{2} = \frac{p}{8\lambda^2} \\ y = -\frac{1}{4\lambda^2}\cdot 2p\lambda = -\frac{p}{2\lambda} \end{cases}$.

A en B hebben dus dezelfde y-coördinaat zodat AB inderdaad evenwijdig is met de x-as. □

3. ★★★ Door het brandpunt F van een parabool $\mathcal{P}$ brengen we een rechte r aan loodrecht op de as s van $\mathcal{P}$ die $\mathcal{P}$ snijdt in A en B. Op r nemen we een willekeurig punt C. De loodrechte projecties van C op de raaklijnen aan $\mathcal{P}$ in A en B noemen we A' en B'. Bewijs dat $A'B'$ een raaklijn is aan de parabool. Waar ligt het raakpunt?



Stel $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$, dan is $s \leftrightarrow y = 0$ en $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. Dus zijn $A\left(\frac{p}{2},p\right)$, $B\left(\frac{p}{2},-p\right)$ en $C\left(\frac{p}{2},q\right)$, met $q \in \mathbb{R}$.

De raaklijn in A is $t_A \leftrightarrow y\cdot p = p\left(x + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{p}{2}$. Analoog is $t_B \leftrightarrow y = -x - \frac{p}{2}$.

De loodlijn door C op t_A is dan $l_A \leftrightarrow y = -\left(x - \frac{p}{2}\right) + q$. Analoog vindt je dat $l_B \leftrightarrow y = x - \frac{p}{2} + q$.

Snijpunt A': $\begin{cases} y = x + \dfrac{p}{2} \\ y = -x + \dfrac{p}{2} + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{q}{2} \\ y = \dfrac{q+p}{2} \end{cases}$, dus $A'\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{q+p}{2}\right)$. Analoog vindt je dat $B'\left(-\dfrac{q}{2}, \dfrac{q-p}{2}\right)$.

Dus $A'B' \leftrightarrow q\left(y - \dfrac{q+p}{2}\right) = p\left(x - \dfrac{q}{2}\right)$, of na vereenvoudiging $A'B' \leftrightarrow y \cdot q = p\left(x + \dfrac{q^2}{2p}\right)$.

Dit is inderdaad een raaklijn aan $\mathcal{P}$ in het punt $Q\left(q^2/2p, q\right)$, met dezelfde ordinaat als C.

4. ★★ Bepaal de (coördinaten van de) punten A en B op $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$ zodat deze punten samen met de top O een gelijkzijdige driehoek vormen.

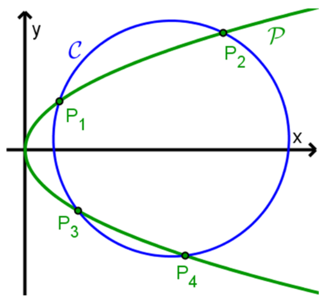
   Omdat $|OA| = |OB|$ moet de x-as een symmetrieas zijn. Stel dus $A\left(2p\lambda^2, 2p\lambda\right)$ en dan ook $B\left(2p\lambda^2, -2p\lambda\right)$.

   $|OA| = |AB| \Leftrightarrow \sqrt{4p^2\lambda^2 + 4p^2\lambda^4} = |4p\lambda| \Leftrightarrow 4p^2\lambda^2 + 4p^2\lambda^4 = 16p^2\lambda^2 \Leftrightarrow 4p^2\lambda^2\left(3 - \lambda^2\right) = 0$.

   De punten worden dus gegeven door $A\left(6p, 2\sqrt{3}p\right)$ en $B\left(6p, -2\sqrt{3}p\right)$.

5. ★★* Als $P\left(x_1, y_1\right) \in \mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$ dan hebben we bewezen dat $t \leftrightarrow y \cdot y_1 = p\left(x + x_1\right)$ de vergelijking is van de raaklijn in P aan $\mathcal{P}$.
   Bewijs dat, als P buiten de parabool $\mathcal{P}$ ligt, de rechte t de rechte is die de punten verbindt waar de raaklijnen vanuit P de parabool $\mathcal{P}$ raken. We noemen t in dat geval de poollijn van P.
   Stel dat de rechten t_A en t_B, die elkaar snijden in P, de parabool raken in de punten $A\left(x_A, y_A\right)$ en $B\left(x_B, y_B\right)$.
   Voor de raaklijn in A geldt $t_A \leftrightarrow y \cdot y_A = p\left(x + x_A\right)$. Dus $P \in t_A \Leftrightarrow y_1 \cdot y_A = p\left(x_1 + x_A\right) \Leftrightarrow A \in t$.
   Analoog is $t_B \leftrightarrow y \cdot y_B = p\left(x + x_B\right)$. Dus $P \in t_B \Leftrightarrow y_1 \cdot y_B = p\left(x_1 + x_B\right) \Leftrightarrow B \in t$. □

6. ★★★ Vier verschillende punten van de parabool $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$ zijn concyclisch (liggen op één cirkel). Bewijs dat de som van de y-coördinaten van die 4 punten nul zijn.



   Noem die vier punten $P_1\left(x_1, y_1\right)$, $P_2\left(x_2, y_2\right)$, $P_3\left(x_3, y_3\right)$ en $P_4\left(x_4, y_4\right)$.

   Stel dat de cirkel waar ze op liggen $\mathcal{C}$ is, met $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. We berekenen de snijpunten:

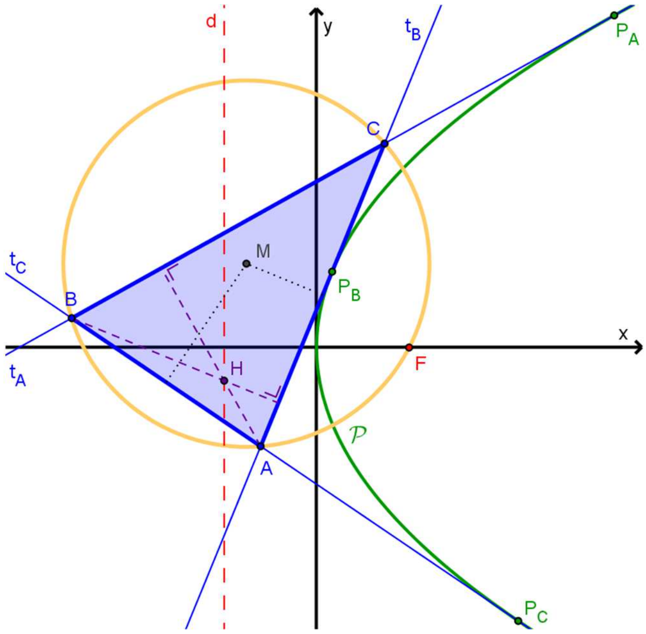
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{2p} = x \\ \left(\dfrac{y^2}{2p}\right)^2 + y^2 + 2a\dfrac{y^2}{2p} + 2by + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{2p} = x \\ \dfrac{y^4}{4p^2} + \left(1 + \dfrac{a}{p}\right)y^2 + 2by + c = 0 \end{cases}$$

   De vier y-coördinaten van de punten moeten dus de oplossing zijn van $y^4 + \left(4p^2 + 4pa\right)y^2 + 8p^2by + 4p^2c = 0$.

   De ontbinding van deze vergelijking is per definitie gelijk aan $\left(y - y_1\right)\left(y - y_2\right)\left(y - y_3\right)\left(y - y_4\right) = 0$.

   De coëfficiënt van y^3 in beide vergelijkingen moet gelijk zijn, dus $0 = -y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \Leftrightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. □

7. De drie zijden van een driehoek raken aan een parabool $\mathcal{P}$.



a) ★★★* Bewijs dat het hoogtepunt van de driehoek op de richtlijn van de parabool ligt.

Noem $\mathcal{P} \leftrightarrow y^2 = 2px$, en neem $P_A\left(2pa^2, 2pa\right) \in \mathcal{P}$, $P_B\left(2pb^2, 2pb\right) \in \mathcal{P}$ en $P_c\left(2pc^2, 2pc\right) \in \mathcal{P}$.

Voor de raaklijn in P_A geldt:

$t_{P_A} \leftrightarrow y \cdot 2pa = p\left(x + 2pa^2\right) \Leftrightarrow 2a \cdot y = x + 2pa^2$.

Analoog vind je:

$t_{P_B} \leftrightarrow 2b \cdot y = x + 2pb^2$ en $t_{P_C} \leftrightarrow 2c \cdot y = x + 2pc^2$.

Noem A het snijpunt van t_{P_B} en t_{P_C} :

$$\begin{cases} 2b \cdot y = x + 2pb^2 \\ 2c \cdot y = x + 2pc^2 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2b \cdot p\left(b+c\right) - 2pb^2 = 2pbc \\ y = p\left(b+c\right) \end{cases}$$

$$*: 2b \cdot y - 2pb^2 = 2c \cdot y - 2pc^2 \Leftrightarrow y = \frac{2pb^2 - 2pc^2}{2\left(b-c\right)} = \frac{\cancel{2}p\left(b^2 - c^2\right)}{\cancel{2}\left(b-c\right)} = \frac{p\left(b+c\right)\cancel{\left(b-c\right)}}{\cancel{\left(b-c\right)}} = p\left(b+c\right)$$

We vinden dus $A\left(2pbc, pb + pc\right)$ en analoog $B\left(2pac, pa + pc\right)$ en $C\left(2pab, pa + pb\right)$.

De rico van de loodlijnen op AB, BC en AC zijn respectievelijk $-2c$, $-2a$ en $-2b$.

De hoogtelijn door A op BC is dus $h_A \leftrightarrow y = -2a\left(x - 2pbc\right) + pb + pc$

Analoog zijn $h_B \leftrightarrow y = -2b\left(x - 2pac\right) + pa + pc$ en $h_C \leftrightarrow y = -2c\left(x - 2pab\right) + pa + pb$.

Het hoogtepunt is het snijpunt van (bijvoorbeeld) h_A en h_B. We stellen gelijk om de abscis van H te berekenen:

$$-2a\left(x - 2pbc\right) + pb + \cancel{pc} = -2b\left(x - 2pac\right) + pa + \cancel{pc} \Leftrightarrow x = \frac{pa - pb \cancel{+4pabc} \cancel{-4pabc}}{2b - 2a}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-p\left(b-a\right)}{2\left(b-a\right)} = -\dfrac{p}{2} \Rightarrow$ het hoogtepunt H ligt op de richtlijn $d \leftrightarrow x = -\dfrac{p}{2}$ (de ordinaat is irrelevant) □

b) ★★★★* Bewijs dat het brandpunt van $\mathcal{P}$ op de omgeschreven cirkel van de driehoek ligt.

De middelloodlijn van $[AB]$ gaat door $M_{[AB]}\left(pbc + pac, \dfrac{pa + pb + 2pc}{2}\right)$ en heeft rico $m_{l_{AB}} = -2c$, dus

$$l_{AB} \leftrightarrow y = -2c\left(x - pbc - pac\right) + \frac{pa + pb + 2pc}{2} \Leftrightarrow y = -2c \cdot x + 2pbc^2 + 2pac^2 + \frac{pa + pb + 2pc}{2}$$

Analoog: $l_{AC} \leftrightarrow y = -2b \cdot x + 2pb^2c + 2pab^2 + \dfrac{pa + pc + 2pb}{2}$

We zoeken de coördinaat van het middelpunt van de omgeschreven cirkel, M :

$$\begin{cases} y=-2c\cdot x+2pbc^2+2pac^2+\dfrac{pa+pb+2pc}{2} \\ y=-2b\cdot x+2pb^2c+2pab^2+\dfrac{pa+pc+2pb}{2} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=p\cdot\dfrac{4ab+4bc+4ac+1}{4} \\ y=p\cdot\dfrac{a+b+c-4abc}{2} \end{cases}$$

$$*: -2c\cdot x+2pbc^2+2pac^2+\frac{pa+pb+2pc}{2}=-2b\cdot x+2pb^2c+2pab^2+\frac{pa+pc+2pb}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2pb^2c+2pab^2+\dfrac{\cancel{pa}+pc+2pb}{2}-2pbc^2-2pac^2-\dfrac{\cancel{pa}+pb+2pc}{2}}{2b-2c}$$

$$=p\cdot\frac{2b^2c+2ab^2+\dfrac{\cancel{a}+c+2b}{2}-2bc^2-2ac^2-\dfrac{\cancel{a}+b+2c}{2}}{2b-2c}=p\cdot\frac{4b^2c+4ab^2-4bc^2-4ac^2+b-c}{4b-4c}$$

$$=p\cdot\frac{\cancel{(b-c)}(4bc+4ab+4ac+1)}{4\cancel{(b-c)}}=p\cdot\frac{4ab+4bc+4ac+1}{4}$$

$$\Rightarrow y=-2c\cdot\left(p\cdot\frac{4ab+4bc+4ac+1}{4}\right)+2pbc^2+2pac^2+\frac{pa+pb+2pc}{2}$$

$$=p\cdot\left(-2abc-2bc^2-2ac^2-\frac{c}{2}+2bc^2+2ac^2+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c\right)$$

$$=p\cdot\left(-2abc\cancel{-2bc^2}\cancel{-2ac^2}-\frac{c}{2}\cancel{+2bc^2}\cancel{+2ac^2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c\right)=p\cdot\frac{a+b+c-4abc}{2}$$

De straal van de omgeschreven cirkel is gelijk aan:

$$r=|AM|=p\cdot\sqrt{\left(\frac{4ab+4bc+4ac+1}{4}-2bc\right)^2+\left(\frac{a+b+c-4abc}{2}-b-c\right)^2}$$

$$=\frac{p}{4}\cdot\sqrt{(4ab-4bc+4ac+1)^2+(2a-2b-2c-8abc)^2}=\frac{p}{4}\cdot\sqrt{(4ab-4bc+4ac+1)^2+(2a-2b-2c-8abc)^2}$$

Voor de afstand van het brandpunt tot het middelpunt van de omgeschreven cirkel geldt:

$$|MF|=p\cdot\sqrt{\left(\frac{4ab+4bc+4ac+1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b+c-4abc}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{p}{4}\cdot\sqrt{(4ab+4bc+4ac-1)^2+(2a+2b+2c-8abc)^2}$$

Het brandpunt zal dus op de omgeschreven cirkel van de driehoek liggen als en slechts als $r=|FM|$

$$\cancel{\frac{p}{4}}\cdot\sqrt{(4ab-4bc+4ac+1)^2+(2a-2b-2c-8abc)^2}=\cancel{\frac{p}{4}}\cdot\sqrt{(4ab+4bc+4ac-1)^2+(2a+2b+2c-8abc)^2}$$

$$\Leftrightarrow (4ab-4bc+4ac+1)^2+(2a-2b-2c-8abc)^2=(4ab+4bc+4ac-1)^2+(2a+2b+2c-8abc)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(4ab+4ac)^2}+\cancel{(-4bc+1)^2}+2(4ab+4ac)(-4bc+1)+\cancel{(2a-8abc)^2}+\cancel{(2b+2c)^2}-2(2a-8abc)(2b+2c)$$

$$=\cancel{(4ab+4ac)^2}+\cancel{(4bc-1)^2}+2(4ab+4ac)(4bc-1)+\cancel{(2a-8abc)^2}+\cancel{(2b+2c)^2}+2(2a-8abc)(2b+2c)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}(4ab+4ac)(-4bc+1)-\cancel{2}(2a-8abc)(2b+2c)=\cancel{2}(4ab+4ac)(4bc-1)+\cancel{2}(2a-8abc)(2b+2c)$$

$$\Leftrightarrow (4ab+4ac)(-4bc+1)-(2a-8abc)(2b+2c)=0$$

$$\Leftrightarrow -16ab^2c+4ab-16abc^2+4ac-4ab-4ac+16ab^2c+16abc^2=0\Leftrightarrow 0=0\ \square$$