Oplossingen

1. ★★ Een vraagje in verband met enkele combinatorische identiteiten

a) Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$.

$$LL = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n = RL$$

b) Bewijs dat $\forall p, n \in \mathbb{N}_0 : C_n^p = \frac{n}{p} \cdot C_{n-1}^{p-1}$.

$$RL = \frac{n}{p} \cdot C_{n-1}^{p-1} = \frac{n}{p} \cdot \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-\cancel{1}-p+\cancel{1})!} = \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p = LL$$

c) Gebruik de vorige twee resultaten om te bewijzen dat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^{n} k.C_n^k = n.2^{n-1}$.

$$LL = \sum_{k=1}^{n} k.C_n^k \overset{\boxed{b}}{=} \sum_{k=1}^{n} n.C_{n-1}^{k-1} = n.\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n.\sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} \overset{\boxed{a}}{=} n.2^{n-1}$$

2. ★★ Bereken $1,01^6$ zonder je rekenmachine.

$$1,01^6 = \left(1+\frac{1}{100}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k \cdot 1^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^k = \sum_{k=0}^{6} \frac{C_6^k}{100^k} = \frac{C_6^0}{100^0} + \frac{C_6^1}{100^1} + \frac{C_6^2}{100^2} + \frac{C_6^3}{100^3} + \frac{C_6^4}{100^4} + \frac{C_6^5}{100^5} + \frac{C_6^6}{100^6}$$

$$= 1 + \frac{6}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{20}{100^3} + \frac{15}{100^4} + \frac{6}{100^5} + \frac{1}{100^6} = 1,061520150601$$

3. ★ Bereken $(3a-2b^2)^5$.

$$(3a-2b^2)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \cdot (3a)^{5-k} \cdot (-2b^2)^k = 243a^5 - 810a^4b^2 + 1080a^3b^4 - 720a^2b^6 + 240ab^8 - 32b^{10}$$

4. ★★ Bereken de constante term (de term zonder x) in de ontwikkeling van $\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt[3]{5x}}\right)^7$.

$$\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt[3]{5x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k \cdot (3x^2)^{7-k} \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt[3]{5x}}\right)^k$$

De exponent van x wordt per term gegeven door: $2(7-k) - \frac{k}{3}$.

De term zal dus een constante zijn als en slechts als $2(7-k) - \frac{k}{3} = 0 \Leftrightarrow 14 - \frac{7k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

De term is dan $C_7^6 \cdot (3x^2)^{7-6} \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt[3]{5x}}\right)^6 = \frac{7.3.64}{25} = \frac{1344}{25}$ $(= 53,76)$

5. ★★⋆ Bereken de coëfficiënt van x^2 in de ontwikkeling van $\left(1+x\sqrt{x}\right)^6 . \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^8$.

$$\left(1+x\sqrt{x}\right)^6 . \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^8 = \left(\sum_{k=0}^{6} C_6^k \cdot \left(x\sqrt{x}\right)^k\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{8} C_8^m \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^{8-m} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^m\right)$$

De exponent van x wordt per term gegeven door: $\frac{3}{2}k+\frac{8-m}{3}-m$.

De term zal dus kwadratisch in x zijn als en slechts als $\frac{3}{2}k+\frac{8-m}{3}-m=2 \Rightarrow \boxed{k=4 \wedge m=5}$.

De term is dan $C_6^4 \cdot \left(x\sqrt{x}\right)^4 \cdot C_8^5 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^{8-5} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^5 = 15.56.(-32)x^2 = -26880x^2$