



Óscar Romero College
 Campus Talen & Exacte Wetenschappen
 Vak: Wiskunde
 Leerkracht: Sven Mettepenningen

Complexe getallen (goniometrische vorm en complexe veeltermen)

1. ★ Bereken zo eenvoudig mogelijk:

a) $(-1-i)^{20}$

b) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3}-i)^{10}}$

2. ★ Stel $z_1 = -1+i\sqrt{3}$ en $z_2 = 1+i$

a) Schrijf $z = \frac{z_1}{z_2}$ in goniometrische vorm $r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

b) Schrijf $z = \frac{z_1}{z_2}$ in algebraïsche vorm $a+ib$, met $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Leid hieruit de exacte waarden af voor $\cos 75^\circ$ en $\sin 75^\circ$.

3. Zij gegeven een complex getal $z \in \mathbb{C}$, met $|z|=1$.

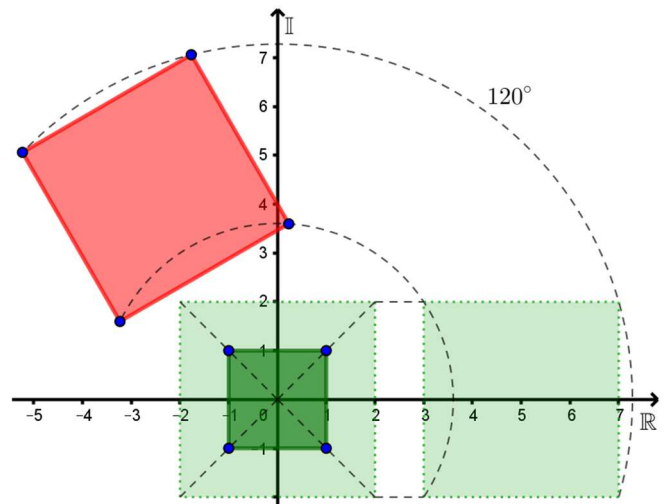
a) ★★★ Bewijs dat $\left(\frac{1+z}{|1+z|}\right)^2 = z$.

b) ★★ Verklaar dit resultaat ook meetkundig.

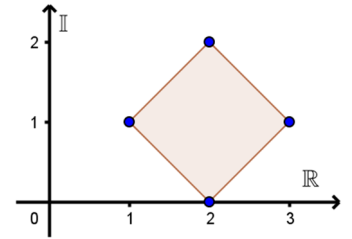
4. ★★ Een complex getal $z \in \mathbb{C}$ heeft modulus m . Bereken z als je weet dat $z+m=8+4i$

5. ★★★ Je ziet in het complexe vlak een groen vierkant getekend (met hoekpunten $\pm 1 \pm i$) en ook het rode beeld van datzelfde vierkant onder een complexe eerstegraadsfunctie f .

Stel het functievoorschrift van f op.



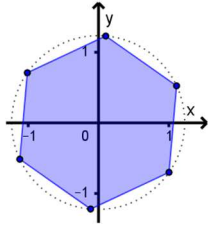
6. ★★ Bedenk een complexe vergelijking waarvan de oplossingen weergegeven worden in het hiernaast staande Argand diagram.



7. ★ Bereken de complexe zesdemachtswortels van $-3 + \sqrt{3}i$ en stel ze voor in het complexe vlak.
8. ★★★ Toon aan dat de verzameling punten $z \in \mathbb{C}$ in het complexe vlak waarvoor geldt dat $\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = -\frac{\pi}{2}$ een halve cirkel vormen.
9. ★★★ De vergelijking $4z^3 - 6\sqrt{3}iz^2 - 3(3 + \sqrt{3}i)z - 4 = 0$ heeft één zuiver reële wortel. Los de vergelijking op.
10. ★★ Los op in \mathbb{C} : $z^3 - 2iz^2 + (15 - 8i)z - 16 - 30i = 0$, als je weet dat $z_1 = 2i$ één van de wortels is.
11. ★★ Gegeven is de complexe veelterm $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.
- Bepaal de reële getallen a , b en c zodat voor elk complex getal z geldt: $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$
 - Bepaal alle (complexe) wortels van de veelterm $P(z)$.
12. ★★★ Bepaal de waarden van de reële parameters $a, b, c \in \mathbb{R}$ opdat de veelterm $P(z) = 2z^4 + az^3 + bz^2 + cz + 3$ onder andere 2 en i als nulpunten zou hebben. Wat is het vierde nulpunt?
13. ★★★ x_1 en x_2 zijn de wortels van de vergelijking $\tan^2 \alpha \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x + 1 = 0$, met $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N}: (x_1)^n + (x_2)^n = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \cdot \cot^n \alpha$

Veel succes!

1.	a) -1024 b) 8	
2.	a) $z = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ b) $z = \frac{(-1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{2}$ c) $\cos 75^\circ = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ en $\sin 75^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	
3.	a) Tip: stel $z = \cos \theta + i \sin \theta$ b) Tip: gebruik de meetkundige voorstelling van een som, deling en kwadraat	
4.	$z = 3 + 4i$	
5.	$f(z) = (-1 + \sqrt{3}i)z - \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$	
6.	$(z - 2 - i)^4 = 1$	
7.	$z = \sqrt[12]{12}(\cos(25^\circ + k \cdot 60^\circ) + i \sin(25^\circ + k \cdot 60^\circ))$, met $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	
8.	Tip: bedenk dat als $\arg(a + bi) = -\pi/2 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b < 0$	
9.	$V = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1 + \sqrt{3}i \right\}$	
10.	$V = \{2i, 1 + 4i, -1 - 4i\}$	
11.	a) $a = 1, b = -6, c = 21$ b) $V = \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 3 + 2\sqrt{3}i, 3 - 2\sqrt{3}i\}$	
12.	$a = -11/2, b = 5, c = -11/2$. De vierde wortel is $3/4$.	
13.	Tip: zet de oplossingen om in hun goniometrische vorm (de modulus is $\cot \alpha$ en het argument $\pm \frac{2\pi}{3}$)	