Oplossingen

1. * Bereken zo eenvoudig mogelijk:

a) $\left(-1-i\right)^{20}=\left(\sqrt{2}\left(\cos 225°+i\sin 225°\right)\right)^{20}=2^{10}\left(\cos 4500°+i\sin 4500°\right)=2^{10}\left(\cos 180°+i\sin 180°\right)=-1024$

b) $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}}=\dfrac{\left(2\left(\cos 60°+i\sin 60°\right)\right)^{13}}{\left(2\left(\cos\left(-30°\right)+i\sin\left(-30°\right)\right)\right)^{10}}=2^{3}\left(\cos\left(1080°\right)+i\sin\left(1080°\right)\right)=8$

2. ★ Stel $z_1=-1+i\sqrt{3}$ en $z_2=1+i$

a) Schrijf $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ in goniometrische vorm $r.\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)$.

$$z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2\left(\cos 120°+i\sin 120°\right)}{\sqrt{2}\left(\cos 45°+i\sin 45°\right)}=\sqrt{2}\left(\cos 75°+i\sin 75°\right)$$

b) Schrijf $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ in algebraïsche vorm $a+ib$, met $a,b\in\mathbb{R}$.

$$z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$$

c) Leid hieruit de exacte waarden af voor $\cos 75°$ en $\sin 75°$.

$$\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos 75°+i\sin 75°\right)=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 75°=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin 75°=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

3. Zij gegeven een complex getal $z\in\mathbb{C}$, met $|z|=1$.

a) ★★ Bewijs dat $\left(\dfrac{1+z}{|1+z|}\right)^2=z$. Daartoe stellen we $z=\cos\theta+i\sin\theta$, dan wordt:

$$\left(\frac{1+z}{|1+z|}\right)^2=\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{|1+\cos\theta+i\sin\theta|}\right)^2=\frac{\left(1+\cos\theta\right)^2+2i\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta-\sin^2\theta}{\left(1+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}+i\frac{2\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

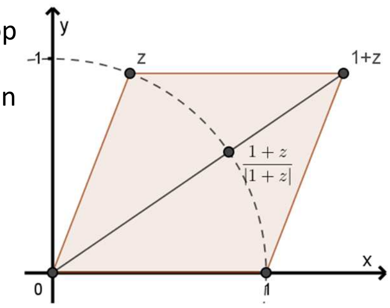
$$=\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta-\left(1-\cos^2\theta\right)}{2+2\cos\theta}+i\frac{2\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta}{2+2\cos\theta}$$

$$=\frac{\cancel{2}\cos\theta\cancel{\left(1+\cos\theta\right)}}{\cancel{2}\cancel{\left(1+\cos\theta\right)}}+i\frac{\cancel{2}\cancel{\left(1+\cos\theta\right)}\sin\theta}{\cancel{2}\cancel{\left(1+\cos\theta\right)}}=\cos\theta+i\sin\theta=z\quad\square$$

b) ★★ Verklaar dit resultaat ook meetkundig.

Als je bij z het getal 1 optelt kan je dit grafisch voorstellen met de parallellogramregel. De getallen 0, z, $1+z$ en 1 vormen dus (in die volgorde) een parallellogram en in dit geval zelfs een ruit, omdat $|z|=1$.

Deel je dan $1+z$ door zijn modulus $|1+z|$ dan bekom je sowieso een getal op de eenheidscirkel (met modulus 1). Het argument van dit getal is de helft van het argument van z omdat het op de bissectrice van het parallellogram ligt.



Met andere woorden: $\left(\dfrac{1+z}{|1+z|}\right)^2 = z$.

4. ★★ Een complex getal $z \in \mathbb{C}$ heeft modulus m. Bereken z als je weet dat $z+m = 8+4i$

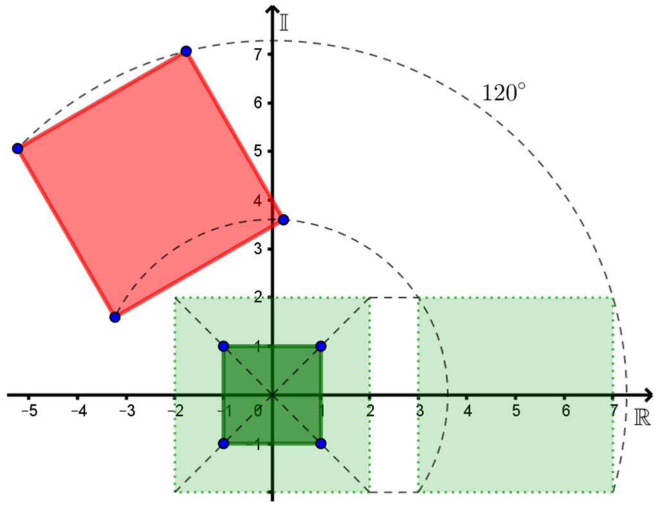
Stel $z = a+bi$, dan wordt de vergelijking $a+bi+\sqrt{a^2+b^2} = 8+4i \Leftrightarrow \begin{cases} a+\sqrt{a^2+b^2} = 8 \\ b = 4 \end{cases}$

De eerste vergelijking hiervan wordt: $a+\sqrt{a^2+16} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+16} = 8-a \overset{\boxed{KV:a<8}}{\Rightarrow} a^2+16 = 64-16a+a^2 \Leftrightarrow a = 3$

Dus $z = 3+4i$

5. ★★* Je ziet in het complexe vlak een groen vierkant getekend (met hoekpunten $\pm 1 \pm i$) en ook het rode beeld van datzelfde vierkant onder een complexe eerstegraadsfunctie f.

Stel het functievoorschrift van f op.

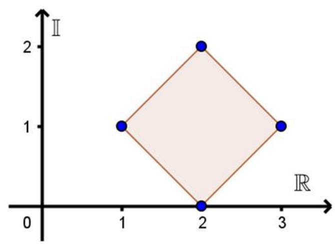


Het vierkant wordt twee keer groter, verschuift 5 eenheden naar rechts en draait dan 120° in tegenwijzerzin, dus:

$$f(z) = (2z+5)\cdot(\cos 120° + i \sin 120°)$$

$$= (2z+5)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-1+\sqrt{3}\,i\right)z - \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

6. ★★ Bedenk een complexe vergelijking waarvan de oplossingen weergegeven worden in het hiernaast staande Argand diagram.



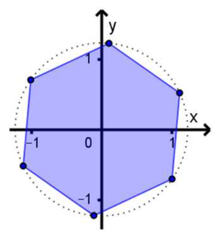
Het vierkant geeft de oplossingen weer van de vergelijking $z^4 = 1$ (nl. ± 1 en $\pm i$), maar dan verschoven van middelpunt O naar middelpunt $2+i$.

De gezochte vergelijking is dus $(z-2-i)^4 = 1$.

7. ★ Bereken de complexe zesdemachtswortels van $-3+\sqrt{3}\,i$ en stel ze voor in het complexe vlak.

$$z^6 = -3+\sqrt{3}i = \sqrt{12}\left(\cos\left(150°+k\cdot 360°\right)+i\sin\left(150°+k\cdot 360°\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[12]{12}\left(\cos\left(25°+k\cdot 60°\right)+i\sin\left(25°+k\cdot 60°\right)\right), \text{ met } k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

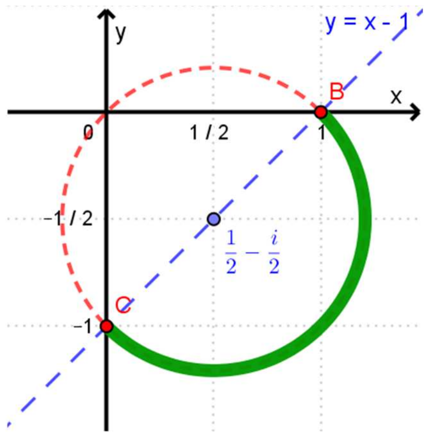


8. ★★★ Toon aan dat de verzameling punten $z \in \mathbb{C}$ in het complexe vlak waarvoor geldt dat $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ een halve cirkel vormen.

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{(x-1)+yi}{x+(y+1)i} \cdot \frac{x-(y+1)i}{x-(y+1)i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{\left(x^2-x+y^2+y\right)+(-x+y+1)i}{x^2+(y+1)^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+y^2+y=0 \\ -x+y+1<0 \\ (x,y) \neq (0,-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1/2)^2+(y+1/2)^2=1/2 \\ y<x-1 \\ (x,y) \neq (0,-1) \end{cases}$$



Deze verzameling punten (halve cirkel) is groen getekend op de figuur.

9. ★★* De vergelijking $4z^3-6\sqrt{3}\,i\,z^2-3\left(3+\sqrt{3}\,i\right)z-4=0$ heeft één zuiver reële wortel. Los de vergelijking op.

Noem die reële wortel r, dan geldt: $4r^3-6\sqrt{3}\,i\,r^2-3\left(3+\sqrt{3}\,i\right)r-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4r^3-9r-4=0 \\ -6\sqrt{3}r^2-3\sqrt{3}r=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r=-1/2}$

	4	$-6\sqrt{3}\,i$	$-3\left(3+\sqrt{3}\,i\right)$	-4
$-1/2$		-2	$1+3\sqrt{3}\,i$	4
	4	$-2-6\sqrt{3}\,i$	-8	0

$$\Delta = \left(-2-6\sqrt{3}\,i\right)^2-4.4.(-8) = 4-108+24\sqrt{3}i+128$$
$$= 24+24\sqrt{3}\,i = 48(\cos 60° + i\sin 60°)$$

De vierkantswortels van $\Delta = 48\left(\cos(60°+k.360°)+i\sin(60°+k.360°)\right)$ zijn:

$$4\sqrt{3}\left(\cos(30°+k.180°)+i\sin(30°+k.180°)\right) = \pm 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \pm\left(6+2\sqrt{3}\,i\right)$$

De complexe wortels zijn dus $z = \dfrac{2+6\sqrt{3}\,i \pm \left(6+2\sqrt{3}\,i\right)}{8} = \begin{cases} 1+\sqrt{3}\,i \\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

De oplossingenverzameling is: $V = \left\{-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, 1+\sqrt{3}\,i\right\}$

10. ★★ Los op in $\mathbb{C}$: $z^3-2iz^2+(15-8i)z-16-30i=0$, als je weet dat $z_1=2i$ één van de wortels is.

	1	$-2i$	$15-8i$	$-16-30i$
$2i$		$2i$	0	$16+30i$
	1	0	$15-8i$	0

De andere wortels zijn dus nog de vierkantswortels van $-15+8i$. Dit kan met een eenvoudig truukje: $-15+8i = 1+8i-16 = (1+4i)^2$.

De oplossingenverzameling is dus $V = \{2i, 1+4i, -1-4i\}$

11. ★★ Gegeven is de complexe veelterm $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

a) Bepaal de reële getallen a, b en c zodat voor elk complex getal z geldt: $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)$

$$P(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)=az^4+bz^3+(3a+c)z^2+3bz+3c=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ 3a+c=24 \\ 3b=-18 \\ 3c=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=21 \end{cases} \Rightarrow P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$$

b) Bepaal alle (complexe) wortels van de veelterm $P(z)$.

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)=0 \Leftrightarrow z^2+3=0 \vee z^2-6z+21=0 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{3}\,i \ \vee \ z=3\pm 2\sqrt{3}\,i$$

$$V=\left\{\sqrt{3}\,i,-\sqrt{3}\,i,3+2\sqrt{3}\,i,3-2\sqrt{3}\,i\right\}$$

12. ★★⋆ Bepaal de waarden van de reële parameters $a,b,c\in\mathbb{R}$ opdat de veelterm $P(z)=2z^4+az^3+bz^2+cz+3$ onder andere 2 en i als nulpunten zou hebben. Wat is het vierde nulpunt?

Als i een nulpunt is dan moet ook $-i$ een nulpunt zijn, zodat de gegevens zich vertalen tot:

$$\begin{cases} P(2)=0 \\ P(i)=0 \\ P(-i)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32+8a+4b+2c+3=0 \\ 2-ai-b+ci+3=0 \\ 2+ai-b-ci+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+4b+2c=-35 \\ b=5 \\ a-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-11/2 \\ b=5 \\ c=-11/2 \end{cases}$$

	2	$-\frac{11}{2}$	5	$-\frac{11}{2}$	3
2		4	-3	4	-3
	2	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$	0
i		$2i$	$-\frac{3}{2}i-2$	$\frac{3}{2}$	
	2	$-\frac{3}{2}+2i$	$-\frac{3}{2}i$	0	
$-i$		$-2i$	$\frac{3}{2}i$		
	2	$-\frac{3}{2}$	0		

Dus:

$$P(z)=2z^4+az^3+bz^2+cz+3$$
$$=(z-2)(z-i)(z+i)\left(2z-\frac{3}{2}\right)$$

Het vierde nulpunt is dus $\frac{3}{4}$.

13. ★★★ x_1 en x_2 zijn de wortels van de vergelijking $\tan^2\alpha \cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x + 1 = 0$, met $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \,\|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N}:\ (x_1)^n + (x_2)^n = 2.\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).\cot^n\alpha$

De discriminant is $\Delta = \tan^2\alpha - 4\tan^2\alpha = -3\tan^2\alpha$, met als wortels $\pm\sqrt{3}\,i\tan\alpha$.

De oplossingen worden dus gegeven door:

$$x_1 = \frac{-\tan\alpha + \sqrt{3}\,i\tan\alpha}{2\tan^2\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \cot\alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

En $x_2 = \dfrac{-\tan\alpha - \sqrt{3}\,i\tan\alpha}{2\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \cot\alpha\left(\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\right)$

Dus geldt: $\forall n \in \mathbb{N}:\ (x_1)^n + (x_2)^n = \cot^n\alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) + \cot^n\alpha\left(\cos\left(\frac{-2\pi n}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi n}{3}\right)\right)$

$$= \cot^n\alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) + \cot^n\alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$$

$$= 2.\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).\cot^n\alpha \quad \square$$