

Voorbeeldoplossingen

1. Definiëer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

a) ★ Bereken I_1 en I_2 .

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \left[\ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

b) ★★★ Stel een recursieformule op voor I_n en bewijs dat geldt $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot \underbrace{\tan^2 x}_{\sec^2 x - 1} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \, dx}_{I_{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow I_n + I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot d(\tan x) = \left[\frac{\tan^{n-1} x}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n-1}$$

2. Definiëer $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$.

a) ★ Bereken I_1 en I_2 .

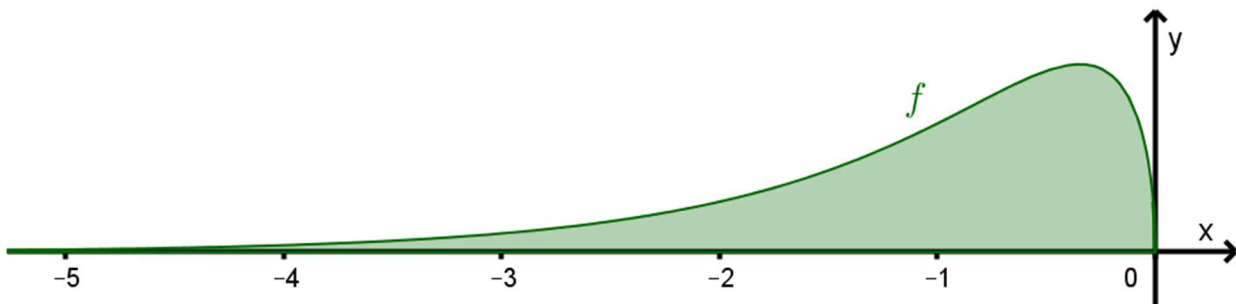
$$I_1 = \int_1^e \ln x \, dx \stackrel{[PI]}{=} \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1$$

$$I_2 = \int_1^e \ln^2 x \, dx \stackrel{[PI]}{=} \left[x \ln^2 x \right]_1^e - 2 \underbrace{\int_1^e \ln x \, dx}_{=I_1=1} = e - 2$$

b) ★★ Stel een recursieformule op voor I_n en bewijs dat geldt $I_n + n \cdot I_{n-1} = e$.

$$I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx \stackrel{[PI]}{=} \left[x \ln^n x \right]_1^e - n \cdot \int_1^e \ln^{n-1} x \, dx = e - n \cdot I_{n-1}$$

3. Je ziet hieronder de grafiek getekend van de functie $f(x) = e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$.



★★★ Bereken de oppervlakte begrepen tussen de grafiek van de functie en de x -as.

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x \sqrt{1 - e^{2x}} \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \, dt \stackrel{*}{=} \frac{\pi}{4}$$

$$\text{stel } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \text{ en } x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1, x = -\infty \Rightarrow t = e^{-\infty} = 0$$

*: deze integraal bepaalt de oppervlakte van een kwartcirkel met straal 1.

4. ★★★ Bereken $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$.

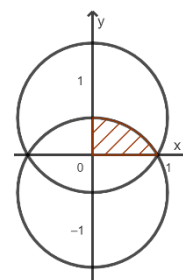
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx \stackrel{[PI]}{=} \left[\frac{-x}{1 + \sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x} = -\frac{\pi}{4} + 1$$

$$PI: f = x \Rightarrow df = dx \text{ en } dg = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} dx \Rightarrow g = \int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} dx = \int \frac{d(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{1 + \sin x}$$

$$*: \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2+2t} = \int_0^1 \frac{2dt}{(t+1)^2} = \left[\frac{-2}{t+1} \right]_0^1 = -1 + 2 = 1$$

$$\text{stel } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ en } dx = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ en } x=0 \Rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$$

5. Gegeven zijn twee cirkels C_1 en C_2 met middelpunten M_1 en M_2 en stralen r_1 en r_2 , zodat $|M_1 M_2| = r_1 = r_2 = 1$. Bepaal exact de oppervlakte van het lensvormige gebied waar ze elkaar snijden (zie figuur).



a) ★★★ Met behulp van een zelfgekozen assenstelsel en integratie.

Kies je assenstelsel zo dat de cirkels middelpunten $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ en $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ hebben.

De vergelijkingen van deze cirkels zijn $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ en $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$, ze snijden elkaar op de x -

as in de punten $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ (reken dit na).

De gezochte oppervlakte is dus (zie figuur):

$$A = 4 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos t - 2) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 t - 2 \cos t) dt = \dots$$

$$\text{stel } x = \sin t \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \cos t \text{ en } dx = \cos t dt \text{ en } x=0 \Rightarrow t=0, x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$$

$$\dots = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + 2 \cos 2t - 2 \cos t) dt = [2t + \sin 2t - 2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

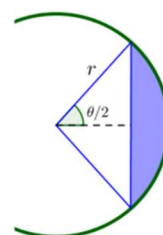
$$(\text{merk op dat } 4 \cos^2 t = 4 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} = 2 + 2 \cos 2t \text{ wegens de formule van Carnot})$$

b) ★★ Met behulp van de geziene formules voor cirkelsegmenten.

Om de oppervlakte van het cirkelsegment te vinden met straal r en middelpuntshoek θ moeten we van de cirkelsector de driehoek aftrekken met als

basis $2r \sin \frac{\theta}{2}$ en hoogte $r \cos \frac{\theta}{2}$:

$$S_{\text{segment}} = S_{\text{sector}} - S_{\Delta} = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} \cdot r \cos \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{r^2 \sin \theta}{2} = \frac{r^2}{2} (\theta - \sin \theta).$$

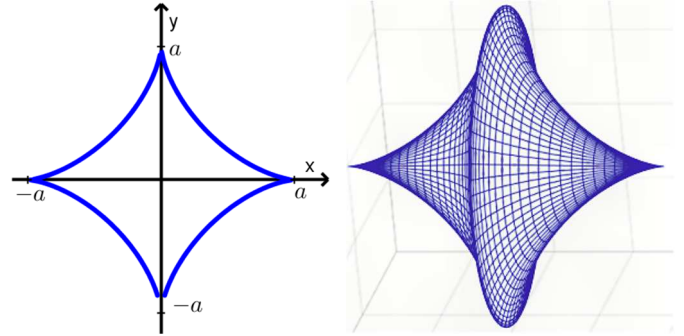


Op onze figuur geldt dat $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$, zodat de gezochte oppervlakte oppervlakte gelijk is aan:

$$A = 2 \cdot \frac{1^2}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. ★★★ De astroïde met vergelijking $\mathcal{C} \leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ wordt gewenteld om de x -as. Bereken de oppervlakte van dit omwentelingslichaam.

We wentelen $f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$ tussen $-a$ en a .



$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{-\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$A = 2\pi \cdot \int_{-a}^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 4\pi \cdot \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = -6\pi a^{\frac{1}{3}} \int_{a^{\frac{2}{3}}}^0 t^{\frac{3}{2}} dt = -6\pi a^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_{a^{\frac{2}{3}}}^0 = \frac{12\pi}{5} a^2$$

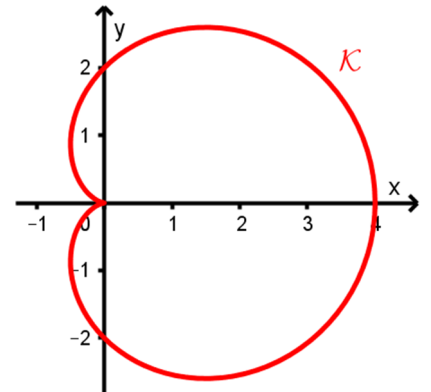
$$\text{stel } t = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow dt = -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx \Rightarrow \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-3dt}{2} \text{ en } x=0 \Rightarrow t = a^{\frac{2}{3}}, x=a \Rightarrow t=0$$

7. ★★★ Gegeven: kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \cos t + \cos(2t) + 1 \\ y = 2 \sin t + \sin(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

Deze kromme heet een cardioïde. Ze ontstaat door een punt te volgen op een cirkel die rond een andere, even grote cirkel rolt.

De lengte L van deze kromme kan geschreven worden als:

$$L = 8 \cdot \int_0^b \cos(k \cdot t) dt.$$



a) Bewijs dit.

We kennen de formule voor de booglengte: $L = 2 \cdot \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$. Omvormen naar onbekende t :

$$L = 2 \cdot \int_{t=\dots}^{t=\dots} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt} \right)^2} \frac{dx}{dt} dt = 2 \cdot \int_{t=\dots}^{t=\dots} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

De grenswaarden voor t zijn de nulpunten van y . Dat zijn de veelvouden van π (reken dit na).

Verder geldt: $dx/dt = -2 \sin t - 2 \sin 2t$ en $dy/dt = 2 \cos t + 2 \cos 2t$

$$\begin{aligned}
L &= 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{(-2\sin t - 2\sin 2t)^2 + (2\cos t + 2\cos 2t)^2} dt = 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{8 + 8\sin t \sin 2t + 8\cos t \cos 2t} dt \\
&= 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{8 + 8\sin t \sin 2t + 8\cos t \cos 2t} dt = 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{8 + 8\cos(2t - t)} dt = 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{8 + 8\cos t} dt \\
&= 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{8 + 8(2\cos^2(t/2) - 1)} dt = 2 \cdot \int_0^\pi \sqrt{16\cos^2(t/2)} dt = 8 \cdot \int_0^\pi \cos(t/2) dt
\end{aligned}$$

b) Wat zijn de waarden van b en k in dat geval?

$$b = \pi \text{ en } k = \frac{1}{2}$$

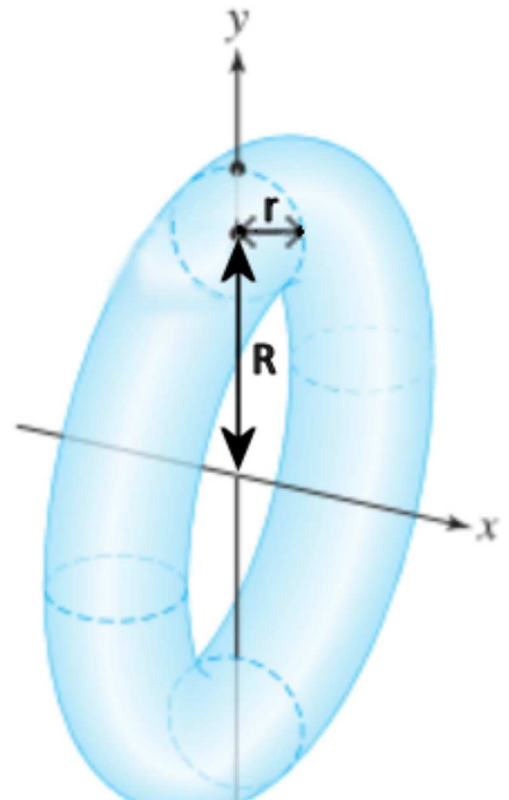
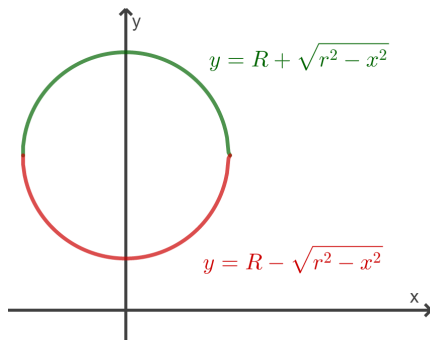
c) Bereken de lengte L van deze cardioïde.

$$L = 8 \cdot \int_0^\pi \cos(t/2) dt = 8 \left[2\sin(t/2) \right]_0^\pi = 16$$

8. ★★★ Als je een cirkel met middelpunt $(R, 0)$ en straal r wentelt om de y -as ontstaat er een omwentelingslichaam dat op een donut lijkt. In de wiskunde noemen we dit een torus.

Bewijs de volgende uitspraken:

- a) Het volume van een torus wordt gegeven door $V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$.
(het product van de oppervlakte van de cirkel die wentelt met de omtrek van de cirkel die zijn middelpunt aflegt bij het wentelen)



Om het gewenste volume (van de torus) te vinden moeten we het volume dat we bekomen door de **binnenste schil** te wentelen aftrekken van het volume dat we bekomen door de **buitenste schil** te wentelen. We bekomen:

$$V_{\text{buiten}} = \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R^2 + 2R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) \right) dx$$

$$V_{\text{binnen}} = \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^r \left(R^2 - 2R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) \right) dx$$

$$V_{\text{buiten}} - V_{\text{binnen}} = \pi \cdot \int_{-r}^r 4R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi R \cdot \underbrace{\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx}_{\text{halve cirkel met straal } r} = 4\pi R \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2 \cdot 2\pi R$$

- b) De oppervlakte van een torus wordt gegeven door $A = 2\pi r \cdot 2\pi R$.

(het product van de omtrek van de cirkel die wentelt met de omtrek van de cirkel die zijn middelpunt aflegt bij het wentelen)

Om de gewenste oppervlakte (van de torus) te vinden moeten we de oppervlakte die we bekomen door de **binnenste schil** te wentelen optellen bij de oppervlakte die we bekomen door de **buitenste schil** te wentelen.

We bekomen: (merk op dat $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\pm x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$)

$$A_{\text{buiten}} = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \left(\frac{Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} + r \right) dx$$

$$A_{\text{binnen}} = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \left(\frac{Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} - r \right) dx$$

$$A_{\text{buiten}} + A_{\text{binnen}} = 4\pi \cdot \int_{-r}^r \frac{Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi Rr \cdot \underbrace{\left[\text{Bgsin} \frac{x}{r} \right]_{-r}^r}_{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi} = 2\pi r \cdot 2\pi R$$

9. Twee krommen zijn bepaald door hun poolvergelijking $C_1 \leftrightarrow r = 1 - \sin \theta$ en $C_2 \leftrightarrow r = 2 + \sin \theta$.

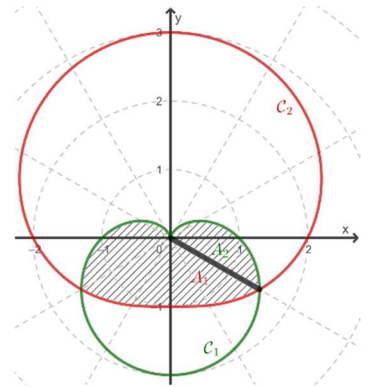
a) ★★★ Bepaal de oppervlakte van het gebied dat binnen beide krommen ligt.

We berekenen eerst de snijpunten van beide krommen:

$$1 - \sin \theta = 2 + \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

De oppervlakte wordt gegeven door (zie figuur):

$$A = 2 \cdot (A_1 + A_2), \text{ met}$$



$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4 + 4\sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta \stackrel{\text{Carnot}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2} + 4\sin \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{9}{2} \theta - 4 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4} \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \pi - \frac{15}{16} \sqrt{3}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \sin \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - 2\sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta \stackrel{\text{Carnot}}{=} \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{3}{2} - 2\sin \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pi - \frac{9}{16} \sqrt{3}$$

$$\text{Dus } A = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \pi - \frac{15}{16} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \pi - \frac{9}{16} \sqrt{3} \right) = \frac{5}{2} \pi - 3\sqrt{3}$$

b) ★★ Bepaal de oppervlakte van het gebied dat binnen C_2 maar buiten C_1 ligt.

Gebruik het voorgaande en je ziet dat de oppervlakte A gegeven wordt door:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \left((2 + \sin \theta)^2 - (1 - \sin \theta)^2 \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (3 + 6 \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} [3\theta - 6 \cos \theta]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) - 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} (4\pi + 6\sqrt{3}) = 2\pi + 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

c) ★★★ Bereken de booglengte van het stuk van C_1 dat buiten C_2 ligt.

Deze lengte wordt gegeven door
$$L = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \sqrt{(1 - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \sqrt{2 - 2 \sin \theta} d\theta$$

Merk op dat $2 - 2 \sin \theta = 2 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$, dus

$$L = 2 \cdot \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right| d\theta \stackrel{*}{=} -4 \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{-2\pi}{3}} |\sin t| dt = 4 \int_{\frac{-2\pi}{3}}^{\frac{-\pi}{3}} |\sin t| dt = 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t dt = 4 \left[-\cos t \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = 4$$

$$*: \text{stel } t = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \Rightarrow dt = -\frac{d\theta}{2}, \theta = \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{-\pi}{3}, \theta = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{-2\pi}{3}$$