



Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Integralen – herhalingsoefeningen

1. Definiëer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

a) ★ Bereken I_1 en I_2 .

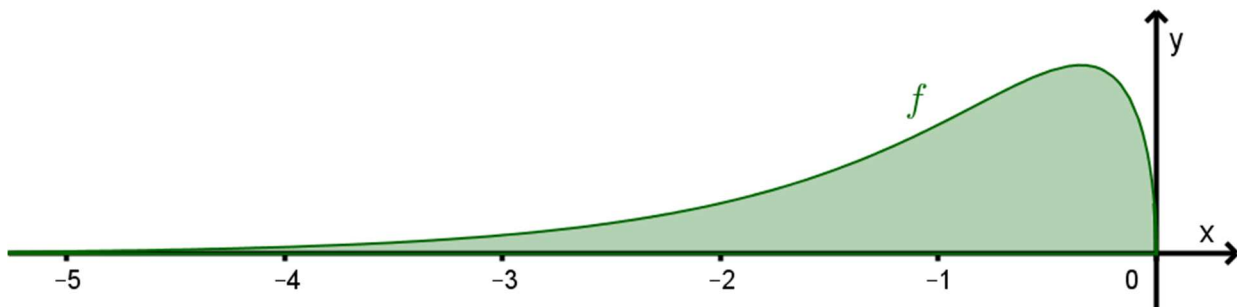
b) ★★★ Stel een recursieformule op voor I_n en bewijs dat geldt $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

2. Definiëer $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$.

a) ★ Bereken I_1 en I_2 .

b) ★★ Stel een recursieformule op voor I_n en bewijs dat geldt $I_n + n \cdot I_{n-1} = e$.

3. Je ziet hieronder de grafiek getekend van de functie $f(x) = e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$.



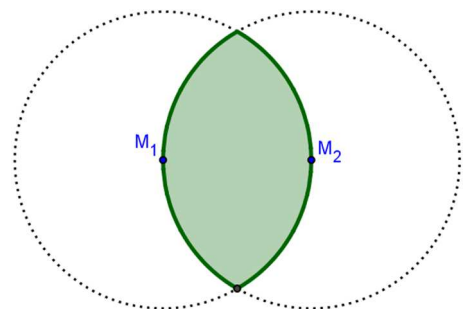
★★★ Bereken de oppervlakte begrepen tussen de grafiek van de functie en de x -as.

4. ★★★ Bereken $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} \, dx$.

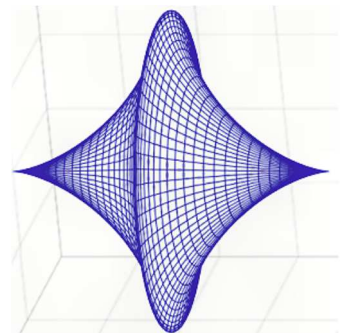
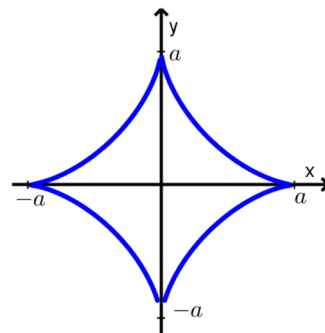
5. Gegeven zijn twee cirkels C_1 en C_2 met middelpunten M_1 en M_2 en stralen r_1 en r_2 , zodat $|M_1 M_2| = r_1 = r_2 = 1$. Bepaal exact de oppervlakte van het lensvormige gebied waar ze elkaar snijden (zie figuur).

a) ★★★ Met behulp van een zelfgekozen assenstelsel en integratie.

b) ★★ Met behulp van de geziene formules voor cirkelsegmenten.



6. ★★★ De astroïde met vergelijking $\mathcal{C} \leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ wordt gewenteld om de x -as. Bereken de oppervlakte van dit omwentelingslichaam.

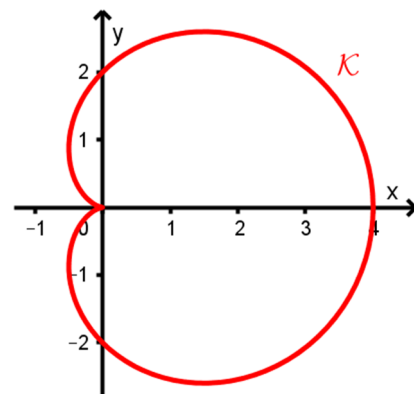


7. ★★★ Gegeven: kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \cos t + \cos(2t) + 1 \\ y = 2 \sin t + \sin(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

Deze kromme heet een cardioïde. Ze ontstaat door een punt te volgen op een cirkel die rond een andere, even grote cirkel rolt.

De lengte L van deze kromme kan geschreven worden als:

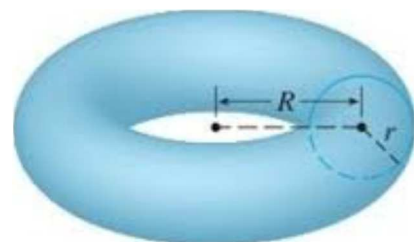
$$L = 8 \cdot \int_0^b \cos(k \cdot t) dt.$$



- a) Bewijs dit.
b) Wat zijn de waarden van b en k in dat geval?
c) Bereken de lengte L van deze cardioïde.
8. ★★★ Als je een cirkel met middelpunt $(R, 0)$ en straal r wentelt om de y -as ontstaat er een omwentelingslichaam dat op een donut lijkt. In de wiskunde noemen we dit een torus.

Bewijs de volgende uitspraken:

- a) Het volume van een torus wordt gegeven door $V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$.
(het product van de oppervlakte van de cirkel die wentelt met de omtrek van de cirkel die zijn middelpunt aflegt bij het wentelen)
- b) De oppervlakte van een torus wordt gegeven door $A = 2\pi r \cdot 2\pi R$.
(het product van de omtrek van de cirkel die wentelt met de omtrek van de cirkel die zijn middelpunt aflegt bij het wentelen)



9. Twee krommen zijn bepaald door hun poolvergelijking

$$\mathcal{C}_1 \leftrightarrow r = 1 - \sin \theta \text{ en } \mathcal{C}_2 \leftrightarrow r = 2 + \sin \theta.$$

- a) ★★★ Bepaal de oppervlakte van het gebied dat binnen beide krommen ligt.
b) ★★ Bepaal de oppervlakte van het gebied dat binnen $\mathcal{C}_2$ maar buiten $\mathcal{C}_1$ ligt.
c) ★★★ Bereken de booglengte van het stuk van $\mathcal{C}_1$ dat buiten $\mathcal{C}_2$ ligt.

