Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Integralen – pittige oefeningen

1. Definiëer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

   a) ★ Bereken I_1 en I_2.

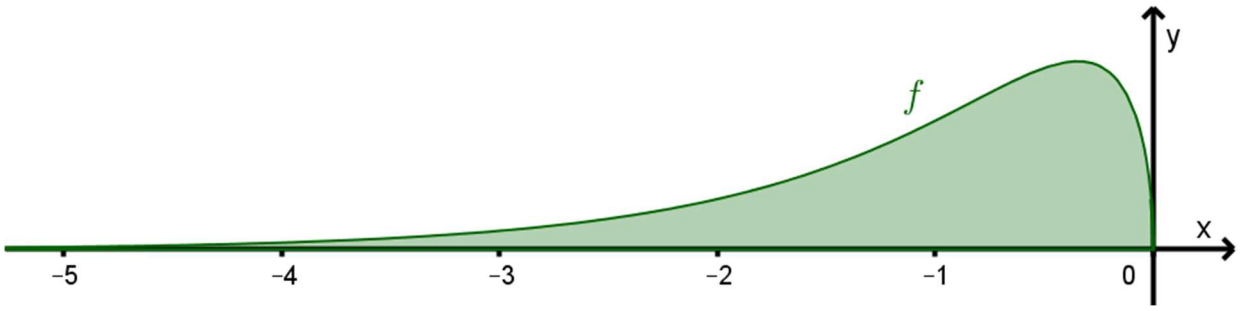
   b) ★★⋆ Stel een recursieformule op voor I_n en bewijs dat geldt $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

2. Definiëer $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$.

   a) ★ Bereken I_1 en I_2.

   b) ★★ Stel een recursieformule op voor I_n en bewijs dat geldt $I_n + n \cdot I_{n-1} = e$.

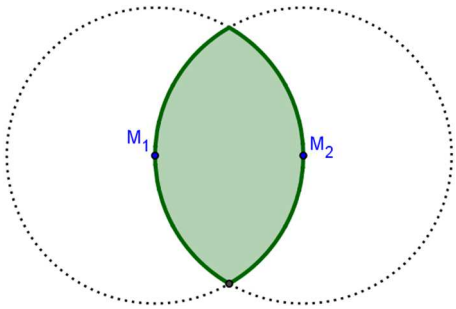
3. Je ziet hieronder de grafiek getekend van de functie $f(x) = e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$.



   ★★★ Bereken de oppervlakte begrepen tussen de grafiek van de functie en de x-as.

4. ★★★ Bereken $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{(1+\sin x)^2} dx$.

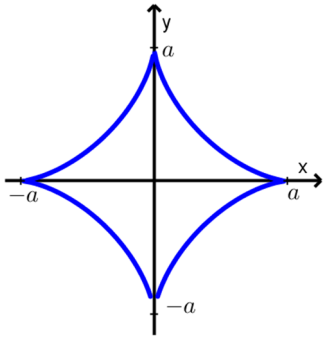
5. Gegeven zijn twee cirkels $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ met middelpunten M_1 en M_2 en stralen r_1 en r_2, zodat $|M_1M_2| = r_1 = r_2 = 1$. Bepaal exact de oppervlakte van het lensvormige gebied waar ze elkaar snijden (zie figuur).

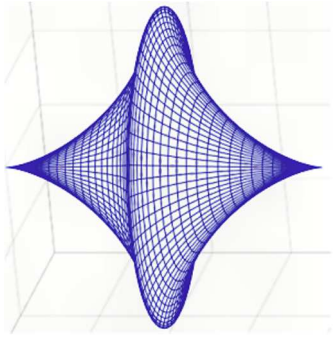


   a) ★★★ Met behulp van een zelfgekozen assenstelsel en integratie.

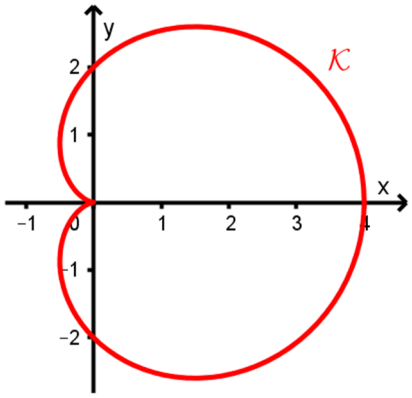
   b) ★⋆ Met behulp van de geziene formules voor cirkelsegmenten.

6. ★★★ De astroïde met vergelijking $\mathcal{C} \leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ wordt gewenteld om de x-as. Bereken de oppervlakte van dit omwentelingslichaam.





7. ★★★ Gegeven: kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cos t + \cos(2t) + 1 \\ y = 2\sin t + \sin(2t) \end{cases}$ $,t \in [0, 2\pi]$.



Deze kromme heet een cardioïde. Ze ontstaat door een punt te volgen op een cirkel die rond een andere, even grote cirkel rolt.

De lengte L van deze kromme kan geschreven worden als:

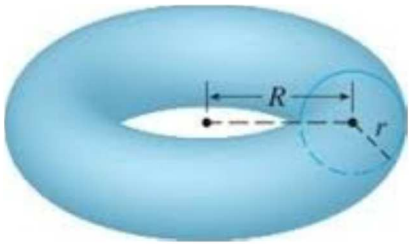
$$L = 8 \cdot \int_0^b \cos(k \cdot t)\, dt\,.$$

a) Bewijs dit.

b) Wat zijn de waarden van b en k in dat geval?

c) Bereken de lengte L van deze cardioïde.

8. ★★★ Als je een cirkel met middelpunt $(R, 0)$ en straal r wentelt om de y-as ontstaat er een omwentelingslichaam dat op een donut lijkt. In de wiskunde noemen we dit een torus.



Bewijs de volgende uitspraken:

- Het volume van een torus wordt gegeven door $V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$.
  (het product van de oppervlakte van de cirkel die wentelt met de omtrek van de cirkel die zijn middelpunt aflegt bij het wentelen)
- De oppervlakte van een torus wordt gegeven door $S = 2\pi r \cdot 2\pi R$.
  (het product van de omtrek van de cirkel die wentelt met de omtrek van de cirkel die zijn middelpunt aflegt bij het wentelen)