

1. ★ DHL levert dagelijks heel veel pakjes overal ter lande. Bij het opsturen gebeuren er drie soorten fouten:

- In 0,8% van de gevallen wordt er iets verkeerd opgestuurd.
- In 1,3% van de gevallen raakt het pakje verloren of wordt het op een verkeerde plaats geleverd.
- In 2,7% van de gevallen raakt het pakje onderweg beschadigd.

Zijn deze gebeurtenissen disjunct? Bereken de kans dat iemand zijn bestelling juist toekomt.

De gebeurtenissen (fouten) zijn disjunct dus de kans dat er iets fout loopt is $0,8\% + 1,3\% + 2,7\% = 4,8\%$.

De kans dat iemand zijn bestelling juist en ongeschonden toekomt is dus $95,2\%$.

(Beschouw je deze gebeurtenissen als niet disjunct, dan gebruik je de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen en dan komt het juiste pakje onbeschadigd en bij jou toe met een kans die gelijk is aan $P = 99,2\% \cdot 98,7\% \cdot 97,3\% \approx 95,27\%$)

2. ★★ In een klas die bestaat uit 12 jongens en 8 meisjes worden willekeurig 3 leerlingen aangeduid om een groepje te vormen. Bereken de kans dat de meisjes in dit groepje in de meerderheid zijn.

Dit zal het geval zijn als er twee of drie meisjes zijn.

$$P = \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^1 + C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{98}{285}$$

3. ★★ Kato speelt met een spel kaarten. Ze neemt telkens de bovenste kaart en stopt pas als ze een dame trekt.

a) Wat is de kans dat dit spel meer dan vijf beurten duurt?

Dan heeft ze al 5 keer geen dame getrokken, daarop is de kans: $P = \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} \approx 65,88\%$

b) Wat is de kans dat dit spel meer dan tien beurten duurt?

Analoog is dit: $P = \frac{C_{48}^{10}}{C_{52}^{10}} \approx 41,34\%$

c) Vanaf hoeveel beurten is deze kans kleiner dan 25%?

$P = \frac{C_{48}^n}{C_{52}^n} < 25\% \Rightarrow n \geq 15$ (je vindt dit met je rekenmachine). Dus vanaf meer dan 15 beurten.

4. ★★★ Een toets bestaat uit 5 multiple choice vragen. Er zijn telkens vier antwoordmogelijkheden. Wat is de kans dat je geslaagd bent voor deze toets als je op alle vragen moet gokken?

Dan heb je dus 3 vragen juist (en 2 fout), 4 vragen juist (en 1 fout), of alle 5 de vragen juist:

$$P = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{45}{512} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{53}{512} \approx 10,35\%$$

5. ★★ Op tafel staan twee vazen. In de linkse vaas zitten 3 blauwe en 2 gele knikkers. In de rechtse vaas zitten 4 blauwe en 5 gele knikkers. Je neemt zonder kijken een knikker uit de linkse vaas en stopt die in de rechtse. Dan neem je willekeurig een knikker uit de rechtse vaas. Wat is de kans dat dit een gele knikker is?

$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{27}{50} = 54\% \text{ (eerste geel en tweede geel of eerste blauw en tweede geel).}$$

6. ★★ Op de tombola van KV Sint-Gillis worden 150 lotjes verkocht. Michael koopt 5 lotjes. Er worden onder de deelnemers willekeurig 3 prijzen verloot.

a) Wat is de kans dat Michael alle drie de prijzen wint?

Hij heeft dan de drie prijslotjes gekocht en ook nog twee niet-winnende lotjes. De kans is dus:

$$P(\text{PPP}\backslash\backslash\backslash) = \frac{C_3^3 \cdot C_{147}^2}{C_{150}^5} \approx 0,00181389\%$$

b) Wat is de kans dat Michael minstens één prijs wint?

$$\text{De kans dat hij geen prijs wint is } P(\backslash\backslash\backslash\backslash\backslash) = \frac{C_{147}^5}{C_{150}^5} \approx 90,267\%,$$

Dus de kans dat hij minstens één prijs wint is het complement, namelijk 9,733%.

7. ★★★ In een vaas zitten 10 knikkers: 6 groene en 4 rode. Suske en Wiske spelen een spel. Suske neemt eerst een knikker uit de vaas. Is de knikker rood dan wint Suske het spel. Anders legt hij de knikker terug en is de beurt aan Wiske. Als zij een groene knikker neemt wint zij het spel. Anders legt ze de knikker terug en is de beurt weer aan Suske. Vanaf dan gaat het spel verder zoals het begon tot er één iemand wint.

Wat is de kans dat Suske het spel wint?

Suske kan winnen in beurt 1, in beurt 3, in beurt 5, ... deze kansen zijn eenvoudig te berekenen:

$$\begin{aligned} P(\text{Suske wint}) &= P(R) + P(GRR) + P(GRGR) + P(GRGRGR) + \dots \\ &= 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + \dots \\ &= \frac{0,4}{1 - 0,24} = \frac{10}{19} \end{aligned}$$

(deze kans is een meetkundige reeks met als eerste term $u_1 = 0,4$ en quotiënt $q = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$, dus de som is

$$\text{gelijk aan } s_n = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{0,4}{1 - 0,24})$$

8. ★★ Gegeven zijn de kansen $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ en $P(B|A) = \frac{1}{4}$.

Bereken de kansen $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ en $P(\bar{A}|B)$.

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{17}{24}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{1/3} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

9. ★★ Van de Vlaamse bevolking is 15% ingeënt tegen het griepvirus. Door zo een inenting stijgen je kansen om de winter door te komen zonder griep van 80% naar 95%.

a) Wat is de kans dat een willekeurig iemand besmet raakt met het griepvirus?

De gegevens vertalen zich tot: $P(I) = 15\%$, $P(G|I) = 5\%$ en $P(G|\bar{I}) = 20\%$. Gevraagd is $P(G)$.

$$P(G) \stackrel{WTK}{=} P(G|I) \cdot P(I) + P(G|\bar{I}) \cdot P(\bar{I}) = 5\% \cdot 15\% + 20\% \cdot 85\% = 17,75\%$$

b) Een willekeurig iemand kreeg niet de griep deze winter. Wat is de kans dat hij werd ingeënt?

$$P(I|\bar{G}) \stackrel{RvB}{=} \frac{P(I) \cdot P(\bar{G}|I)}{P(I) \cdot P(\bar{G}|I) + P(\bar{I}) \cdot P(\bar{G}|\bar{I})} = \frac{15\% \cdot 95\%}{15\% \cdot 95\% + 85\% \cdot 80\%} = \frac{57}{329} \approx 17,325\%$$

10. ★★ In de tabel hieronder zie je in een kruistabel de gegevens staan van 1500 studentes statistiek. Er wordt bijgehouden of de studentes blond of niet zijn, en of ze een voldoende haalden voor statistiek of niet.

	voldoende	onvoldoende	totaal
blond	520	80	600
niet-blond	780	120	900
totaal	1300	200	1500

Zijn de gebeurtenissen 'blond zijn' en 'voldoende halen' statistisch afhankelijk of niet?

De twee gebeurtenissen B en V zijn statistisch onafhankelijk als en slechts als $P(B \cap V) = P(B) \cdot P(V)$.

We berekenen: $P(B \cap V) = \frac{520}{1500} = \frac{26}{75}$ en $P(B) \cdot P(V) = \frac{600}{1500} \cdot \frac{1300}{1500} = \frac{2}{5} \cdot \frac{13}{15} = \frac{26}{75}$. De gebeurtenissen zijn

dus (uiteraard) statistisch onafhankelijk.