



Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Onbepaalde integralen

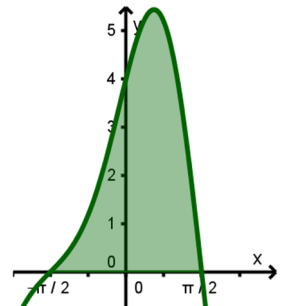
1. Bereken de volgende onbepaalde integralen (een substitutie is aangewezen):

- | | | | |
|---|---|---|--|
| a) ★ $\int \sin(3x-4) dx$ | b) ★ $\int e^{2x-3} dx$ | c) ★ $\int \tan x dx$ | d) ★ $\int \frac{1}{\sqrt[5]{4x-7}} dx$ |
| e) ★ $\int x(4x^2-2)^7 dx$ | f) ★ $\int \frac{\ln x}{x} dx$ | g) ★ $\int \frac{dx}{x \ln x}$ | h) ★★ $\int \frac{3x^2-1}{\sqrt[4]{x^3-x+3}} dx$ |
| i) ★ $\int \sin^4 x \cos x dx$ | j) ★ $\int \frac{x^3}{\sin^2(x^4)} dx$ | k) ★★ $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx$ | l) ★ $\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| m) ★★ $\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ | n) ★★ $\int \cos^3 x dx$ | o) ★ $\int \frac{\text{Bgsin } x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | p) ★★ $\int \frac{\tan(\ln(\sqrt{x}))}{x} dx$ |
| q) ★★ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ | r) ★★ $\int \frac{x \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | s) ★★ $\int \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$ | t) ★★★ $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ |

2. ★★ Op de grafiek zie je dat de functie $f(x) = (2 + \sin x)^2 \cdot \cos x$ positief is in het interval

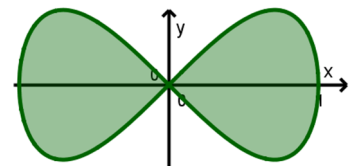
$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Bereken in dat interval de oppervlakte onder de kromme.



3. ★★★ Je ziet de grafiek getekend van de kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow y^2 = x^2 - x^4$.

Bereken de oppervlakte van het gebied dat deze kromme omsluit.

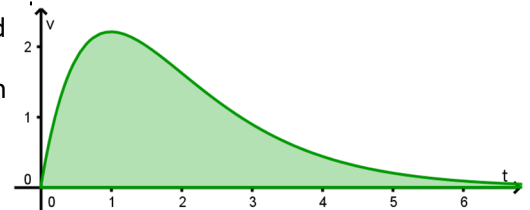


4. Bereken de volgende onbepaalde integralen (partiële integratie is aangewezen):

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) ★★★ $\int \text{Bgsin}^2 2x dx$ | b) ★★ $\int (x^2 - x + 1) \sin x dx$ | c) ★★ $\int x \cdot \text{Bgtan } x dx$ |
| d) ★★ $\int e^{-x} \sin x dx$ | e) ★★ $\int \ln(4+x^2) dx$ | f) ★★★ $\int e^{\sin x} \cos^3 x dx$ |

5. Een fiets rijdt lek op tijdstip $t = 0$. De snelheid waarmee de fietsband lucht verliest wordt gegeven door de functie $v(t) = 6te^{-t}$, met t in minuten en v in liter per minuut.

- a) ★★ Hoeveel lucht is de band al verloren na 3 minuten?
- b) ★★★ Toon aan dat er in totaal 6 liter lucht in de band zit.



6. Bereken de volgende onbepaalde integralen:

a) $\star\star \int \frac{x}{9x^2 + 6x + 5} dx$

b) $\star\star \int \frac{2x+1}{\sqrt{9+16x-4x^2}} dx$

c) $\star\star \int \frac{3x+2}{x^3+x^2-2} dx$

d) $\star\star \int \frac{dx}{x^3+8}$

e) $\star\star \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

f) $\star \int \cos^2 8x dx$

g) $\star\star \int \tan^3 3x dx$

h) $\star \int \frac{\cot x + \csc x}{\sin x} dx$

i) $\star\star \int \sec^4 x dx$

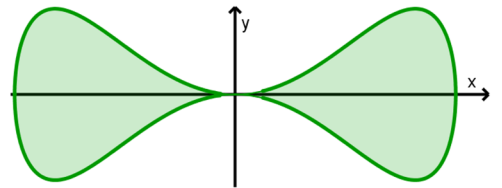
j) $\star\star \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$ (met $x > 5$)

k) $\star\star \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

l) $\star\star \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$

7. $\star\star\star$ Je ziet de grafiek getekend van de kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow y^2 = x^4 - x^6$.

Bewijs dat de ingesloten oppervlakte gelijk is aan $\frac{\pi}{4}$



8. Een raket schiet vanop de grond recht omhoog met versnelling $a(t) = t \cdot e^t$. De tijd is gegeven in s en de afstand in m . Op tijdstip $t = 0$ is de (start)snelheid gelijk aan $v_0 = 0 m/s$.

a) Met welke snelheid beweegt de raket na 3 seconden?

b) Welke hoogte haalt de raket na 3 seconden?

Veel succes!

1.	a) $-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$ b) $\frac{1}{2}e^{2x-3}+C$ c) $-\ln \cos x +C$ d) $\frac{5}{16}\sqrt[5]{(4x-7)^4}+C$ e) $\frac{(4x^2-2)^8}{64}+C$ f) $\frac{(\ln x)^2}{2}+C$ g) $\ln \ln(x) +C$	h) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x^3-x+3)^3}+C$ i) $\frac{\sin^5 x}{5}+C$ j) $-\frac{\cot(x^4)}{4}+C$ k) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-3\text{Bgtan } x+C$ l) $-4\sqrt{1-x^2}+C$ m) $2\text{Bgsin } x^2+C$ n) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$	o) $\frac{(\text{Bgsin } x)^2}{2}+C$ p) $-2\ln\left \cos\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)\right +C$ q) $-\frac{2}{\sin 2x}+C$ r) $-e^{\sqrt{1-x^2}}+C$ s) $2\ln(2+\sin x)+\frac{4}{2+\sin x}+C$ t) $\text{Bgtan}(e^x)+C$
2.	$S=\frac{26}{3}$		
3.	$S=\frac{4}{3}$		
4.	a) $x\cdot\text{Bgsin}^2 2x+\text{Bgsin } 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}-2x+C$ b) $(-x^2+x+1)\cos x+(2x-1)\sin x+C$ c) $\frac{x^2}{2}\cdot\text{Bgtan } x+\frac{1}{2}\cdot\text{Bgtan } x-\frac{x}{2}+C$	d) $-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x-\frac{1}{2}e^{-x}\sin x+C$ e) $\frac{x^2}{2}\cdot\text{Bgtan } x+\frac{1}{2}\cdot\text{Bgtan } x-\frac{x}{2}+C$ f) $e^{\sin x}(-\sin^2 x+2\sin x-1)+C$	
5.	a) Ongeveer 4,80 liter lucht (bereken de integraal $\int_0^3 v(t) dt$) b) Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^{+\infty} v(t) dt$ met behulp van limieten (gebruik l'Hôpital)		
6.	a) $\frac{1}{18}\ln 9x^2+6x+5 -\frac{1}{18}\text{Bgtan}\frac{3x+1}{2}+C$ b) $-\frac{1}{2}\sqrt{9+16x-4x^2}+\frac{5}{2}\text{Bgsin}\frac{2x-4}{5}+C$ c) $\ln x-1 -\frac{1}{2}\ln x^2+2x+2 +\text{Bgtan}(x+1)+C$ d) $\frac{1}{12}\ln x+2 -\frac{1}{24}\ln x^2-2x+4 +\frac{\sqrt{3}}{12}\text{Bgtan}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$ e) $2\sqrt{x}-2\text{Bgtan}\sqrt{x}+C$	f) $\frac{x}{2}+\frac{1}{32}\sin 16x+C$ g) $\frac{1}{6}\tan^2 3x+\frac{1}{3}\ln \cos 3x +C$ h) $-\frac{1}{\sin x}-\cot x+C$ i) $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$ j) $\sqrt{x^2-25}-5\text{Bgsec}\frac{x}{5}+C$	

	$\text{k) } \ln \left \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \right + C$ $\text{l) } -4\sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(4 - x^2)^3} + C$
7.	Hint: bedenk dat de oppervlakte gelijk is aan $S = 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$ en gebruik de substitutie $x = \sin t$.
8.	$v(3) \approx 41,17 \text{ (m/s)}$ $h(3) \approx 25,09 \text{ (m)}$