Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

De normale verdeling – stochasten – de binomiale verdeling – de centrale limietstelling

1. In de hoofdstad van Ivoorkust, Yamoussoukro, meet men de lengte van 100 mannen (in cm):

168,6	156,4	166,8	185,5	177,3	201,8	177,3	197,3	175,5	169,5
172,7	170,9	190,0	179,1	166,8	202,3	162,7	170,0	155,0	168,6
169,5	157,7	168,6	189,5	183,2	159,1	160,0	168,2	172,3	161,8
190,5	186,4	178,6	161,8	197,7	173,2	174,5	185,9	165,9	181,8
157,7	178,2	171,4	175,0	163,6	183,2	180,9	160,9	155,0	***204,9***
175,5	164,5	186,8	172,3	169,5	164,1	167,3	181,8	176,8	180,0
174,5	185,9	165,9	181,8	157,7	178,2	171,4	175,0	163,6	183,2
170,9	177,3	190,0	155,0	183,2	190,5	174,5	171,4	***155,0***	169,5
185,5	169,5	202,3	157,7	168,2	161,8	181,8	183,2	164,5	181,8
201,8	170,9	170,0	189,5	161,8	173,2	178,2	160,9	172,3	180,0

a) * Stel een frequentietabel op met als eerste klasse $[150,155[$. *(controletotaal: Σx = 17459.1)*

b) * Teken een boxplot en duid alle relevante waarden aan.

c) ★ Teken het bijhorende histogram en bijhorend enkelvoudig frequentiepolygoon. Zorg ervoor dat je assen zo geijkt zijn dat het frequentiepolygoon kan opgevat worden als een dichtheidskromme.

d) * Bereken met behulp van je rekenmachine het gemiddelde en de standaardafwijking van deze steekproef.

e) ★ Teken (op dezelfde grafiek als het histogram) de bijhorende normale verdelingskromme. Kan je besluiten dat de gegevens min of meer normaal verdeeld zijn?

f) ★ Hoeveel % van de mannen uit de steekproef meet meer dan 185 cm?

- Bereken dit exact met behulp van je rekenmachine.
- Bereken dit benaderend door ervan uit te gaan dat de verdeling normaal is.

2. De tijdsduur van lokale telefoongesprekken is normaal verdeeld met een gemiddelde van 9,5 minuten en een standaardafwijking van 3 minuten.

a) ★ Welke tijdsduur wordt door 5% van de gesprekken overschreden?

b) ★ Hoeveel procent van de gesprekken duurt minder dan 5 minuten?

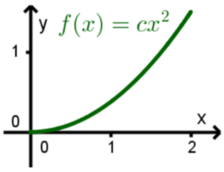
3. ★★* Als Mahamadou thuis om 8u00 vertrekt naar school dan is hij twee derde van de keren te laat voor de les die stipt om 8u25 begint. Vertrekt hij om 7u40 dan is hij slechts een achtste van de keren te laat. In de veronderstelling dat Mahamadou zijn reistijd naar school normaal verdeeld is, hoe laat moet hij dan thuis vertrekken om in niet meer dan 5% van de gevallen te laat te komen?

4. ★★ Een munstuk wordt net zo vaak opgeworpen tot er kop verschijnt, of tot er drie keer na elkaar munt verschijnt. Bepaal de verwachtingswaarde en de variantie van het aantal worpen.

5. ★★ Bij het kaartspel Whist, in de volksmond 'wiezen' genoemd, krijgt iedereen bij aanvang 13 kaarten uitgedeeld. Noem de stochastische variabele X het aantal azen van één van de spelers.

   Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking μ_X en σ_X.

6. In Spanje mogen de werknemers van firma Tammenont 's middags een siësta houden van maximaal 2 uur.

   De tijdsduur van die siësta kan beschreven worden door de stochast X met als dichtheidsfunctie $f(x)=\begin{cases} cx^2 & ,x\in[0,2] \\ 0 & ,x\notin[0,2] \end{cases}$, met $c\in\mathbb{R}$ een constante.

   a) ★ Bepaal de waarde van de reële constante c opdat f wel degelijk een dichtheidsfunctie is.

   b) ★ Bereken hoeveel procent van de siësta's langer dan 1,5u duren.

   c) ★ Bereken de verwachtingswaarde μ en de standaardafwijking σ van de continue stochast X.

7. Een koperen ring moet passen om een ijzeren staaf. Dus de binnendiameter van de ring moet groter zijn dan de diameter van de staaf. Bij de productie van de ringen hangt de precieze waarde van de binnendiameter X van het toeval af, net als de precieze diameter van de staven Y. Zowel X als Y zijn dus stochastische variabelen die uitgedrukt worden in millimeter.

   Stel nu dat $X \sim N(45\,;0{,}3)$ en $Y \sim N(44\,;0{,}4)$ (X en Y zijn onafhankelijk van elkaar)

   a) ★★ Bereken de kans dat een willekeurige ring om een willekeurige staaf past in dit geval.

   b) ★★ Men beslist om de ringen met factor $1{,}2$ en de staven met factor $1{,}15$ te vergroten. Bereken in dat geval opnieuw de kans dat een willekeurige ring om een willekeurige staaf past.

8. De inhoud van een blikje cola is normaal verdeeld met $\mu = 33\,cl$ en $\sigma = 0{,}5\,cl$.

   a) ★* Je giet drie blikjes cola uit in een glas van exact $1\,l$. Wat is de kans dat het glas overloopt?

   b) ★* Je koopt een verpakking van 6 blikjes cola. Wat is de kans dat de gemiddelde inhoud van een blikje kleiner is dan $32{,}6\,cl$?

9. ★★ Leerlingen van het Oscar Romerocollege scoren gemiddeld 84 op de eerste ronde van de wiskunde olympiade, met een standaardafwijking van 10. Hoeveel leerlingen moeten we minstens afvaardigen om 95% zeker te zijn van een gemiddelde van minstens 80? Hou rekening met de continuïteitscorrectie (er zijn enkel gehele punten mogelijk).

10. Bij het spelen van Guitar Hero blijkt dat 18% van de spelers last heeft van hoofdpijn achteraf. Op een vrijgezellenweekend speelt een groepje van 10 vrienden 's avonds Guitar Hero.

    a) ★ Wat is de kans dat achteraf precies 2 personen last hebben van hoofdpijn?

    b) ★ Wat is de kans dat minstens 3 vrienden achteraf last heeft van hoofdpijn?

11. Iemand gooit een zuiver muntstuk een even aantal keer en wil berekenen hoe groot de kans is dat precies de helft van de keren kop verschijnt.

   a) ★ Bereken deze kans als hij 20 keer gooit exact. Rond af op 4 decimalen nauwkeurig.

   b) ★★ Bereken deze kans als hij 20 keer gooit met een normale benadering. Rond af op 4 decimalen nauwkeurig.

   Het verschil tussen de antwoorden op de vorige vragen is niet zo groot.

   Het blijkt dat, als het aantal keer gooien (n) groter wordt, dan het verschil tussen de antwoorden kleiner wordt.

   c) ★ Leg uit waarom dat zo is!

   d) ★★★ Bepaal met je rekenmachine vanaf welke n de normale benadering minder dan 0,0001 verschilt met de exacte berekening.

12. ★★ Als je om 1u ’s nachts langs de N41 naar huis rijdt heb je 1 kans op 30 om een alcoholcontrole te moeten ondergaan.
Hoeveel keer moet je daar passeren om 1u ’s nachts om 90% zeker te zijn dat je een alcoholcontrole tegenkomt?

13. Voor de lengte L van een liedje uit een hele verzameling liedjes geldt $L \sim N\left(\mu_L, \sigma_L\right)$, met $\mu_L = 4 \text{ min}$ en $\sigma_L = 30 \text{ sec}$.

   a) DJ Didier stelt een playlist samen van 16 willekeurige liedjes. Hoe is de totale lengte van deze playlist verdeeld? Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.

   b) Op een CD is er plaats voor 65 minuten muziek. Bereken de kans dat Didier zijn playlist op één CD past als je weet dat de brandsoftware tussen elk liedje een pauze van 1 seconde plaatst.

   c) Bereken de kans dat er bij zo’n playlist minstens twee liedjes zijn die langer dan 5 minuten duren.

Veel succes!

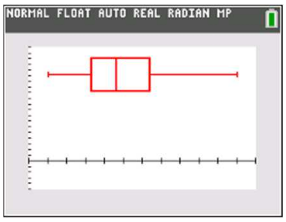
Antwoorden (moeilijkheidsgraad ★: eenvoudig, ★★: gemiddeld, ★★★: lastig, ★★★★: erg moeilijk)

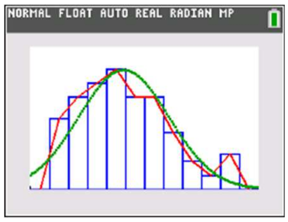
1.

a)

	x_i	n_i	cn_i	f_i	Genormaliseerde frequentie
$[150,155[$	152,5	0	0	0	0
$[155,160[$	157,5	10	10	0.1	0,02
$[160,165[$	162,5	13	23	0.13	0,026
$[165,170[$	167,5	15	38	0.15	0,03
$[170,175[$	172,5	17	55	0.17	0,034
$[175,180[$	177,5	13	68	0.13	0,026
$[180,185[$	182,5	13	81	0.13	0,026
$[185,190[$	187,5	8	89	0.08	0,016
$[190,195[$	192,5	4	93	0.04	0,008
$[195,200[$	197,5	2	95	0.02	0,004
$[200,205[$	202,5	5	100	0.05	0,01
$[205,210[$	207,5	0	0	0	0

b) $x_{\min} = 155$, $Q_1 = 166,35$, $Me = 172,95$, $Q_3 = 181,8$ en $x_{\max} = 204,9$.





c) Zie schermafbeelding 2.

d) $\overline{x} = 174,591$ en $s = 11,889$

e) Zie schermafbeelding 2.

f) • 19% • 19,06%

2. a) 14’26” b) 6,68%

3. Hij moet om zeker te zijn voor 7u34 vertrekken.

4. $E(X) = \frac{7}{4}$ en $Var(X) = \frac{11}{16}$

5. $\mu_X = 1$ en $\sigma_X \approx 0,84$

6. a) $c = \frac{3}{8}$ b) $57,8125\%$ c) $\mu = 1,5$ en $\sigma = \frac{\sqrt{15}}{10}$

7. a) $97,725\%$ b) Net geen 100%

8. a) $12,41\%$ b) $2,5\%$

9. 14 leerlingen

10. a) $29,80\%$ b) $26,80\%$

11. a) $0,1762$ b) $0,1769$ c) wegens de centrale limietstelling d) vanaf $n = 78$

12. Je moet daar minstens 68 keer passeren

13. a) $Pl \sim N(64,2)$ b) 64,62% c) 5%