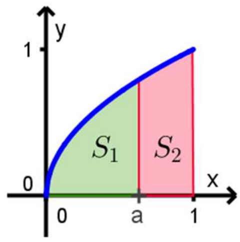
Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

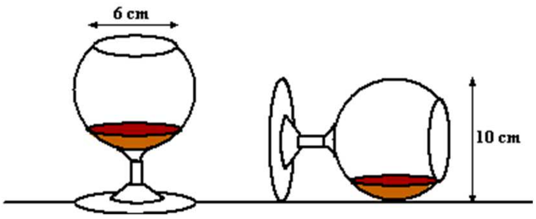
Bepaalde integralen - toepassingen



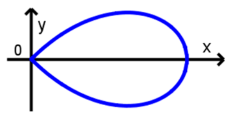
1. De oppervlakte begrepen tussen de grafiek van $y=\sqrt{x}$, de x-as en de rechte $x=1$ wordt in twee stukken verdeeld door de verticale rechte $x=a$: een stuk S_1 en een stuk S_2 (zie figuur).

   a) ★ Voor welke waarde van a zal $S_1=S_2$?

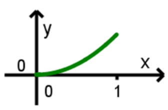
   b) ★ V_1 en V_2 zijn de volumes van de omwentelingslichamen die ontstaan door S_1 en S_2 te wentelen om de x-as. Voor welke waarde van a zal $V_1=V_2$?



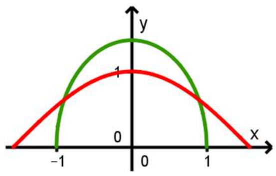
2. ★★ Een enorm cognacglas bestaat uit een bol met diameter 10 cm. De opening aan de bovenkant is een cirkel met diameter 6 cm.
   Een goede cafébaas schenkt er echter maar een klein laagje cognac in.
   Het moet precies zoveel cognac zijn, dat het er nét niet uitloopt als je het glas op zijn kant legt. Zie de tekening.
   Bereken hoeveel cognac er in een goed-ingeschonken glas zit.



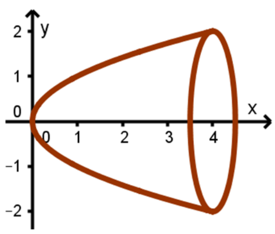
3. ★★ Rechts zie je de grafiek getekend van de kromme $\mathcal{R} \leftrightarrow y^2=\dfrac{x^2-x^3}{1+x}$, met $0\le x\le 1$.
   Als je deze grafiek wentelt om de x-as krijg je iets dat lijkt op een regendruppel.
   Bereken het volume van deze regendruppel.



4. ★★★ Bereken de booglengte van de parabool $y=\dfrac{x^2}{2}$ in het interval $[0,1]$.
   (je moet hier aantonen dat $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$)



5. ★★★ Bewijs dat de lengte van de halve ellips met vergelijking $y=\sqrt{2-2x^2}$ gelijk is aan de lengte van een cosinusboog $y=\cos x$ tussen de twee nulpunten $-\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$.
   (Tip: je kan de booglengtes niet bereken maar wel aantonen dat de integralen gelijk zijn).



6. ★★ Als je de grafiek van de functie $f(x)=\sqrt{x}$ in het interval $[0,4]$ wentelt om de x-as dan krijg je een paraboloïde. Bereken de manteloppervlakte van deze paraboloïde

Veel succes!!

Antwoorden (moeilijkheidsgraad ★: eenvoudig, ★★: gemiddeld, ★★★: lastig, ★★★★: erg moeilijk)

1.	a) $a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ b) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2.	$V = \frac{52}{3}\pi$ ($\approx 54,45\ cl$)
3.	$V = \pi\left(2\ln 2 - \frac{4}{3}\right) \approx 0,16638$
4.	$L = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} \approx 1,1478$
5.	Voor bij de berekening van de lengte van de halve ellips de substitutie $x = \sin t$ uit en toon aan dat beide integralen dan gelijk zijn (je kan van deze integralen ***geen*** primitieve functies berekenen)
6.	$S = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{17^3} - 1\right)$