



Óscar Romero College

Campus Talen & Exacte Wetenschappen

Vak: Wiskunde

Leerkracht: Sven Mettepenningen

Verloop van irrationale functies

1. Bereken de volgende limieten:

a) ★★ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 1}}{\sqrt{4x^2 + 3x - 2x}}$

b) ★★ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3x+10} + 2x + 2}{x^4 + 7x - 2}$

c) ★★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + x - 1} - 3x$

d) ★★ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1 - \sqrt{4x+5}}{\sqrt{x+3} - 3x+1}$

e) ★★ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4-x} - \sqrt{1-x})$

2. Bepaal de asymptoten van volgende functies:

a) ★★★ $f(x) = \frac{\sqrt{x^6+1} - \sqrt{2x}}{x^3 - x}$

b) ★★ $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} + x - 2$

c) ★★★ $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 1} - 2x$

3. ★★ Leerlingen denken soms ten onrechte dat de grafiek van een functie een asymptoot nooit kan snijden.

Toon aan dat dit onjuist is door de snijpunten te berekenen van de grafiek van $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}}{x}$ met haar horizontale asymptoot.

4. ★★★ Als $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $b, c \in \mathbb{R}$, dan heeft de functie $f(x) = \sqrt{a^2 x^2 + bx + c} - ax$ altijd een horizontale en een schuine asymptoot. Bepaal hun vergelijking.

5. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1}$.

a) ★ Bepaal het domein van deze functie.

b) ★★ Bepaal de nulpunten van deze functie.

c) ★★ De grafiek van deze functie heeft drie verschillende asymptoten. Bepaal hun vergelijking.

6. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) ★★ Deze functie heeft twee verschillende horizontale asymptoten. Bepaal hun vergelijking.

b) ★★ Bepaal het verloop van deze functie (stijgen en dalen) met behulp van de eerste afgeleide.

c) ★★ Bewijs dat deze functie twee verschillende buigpunten heeft. Je hoeft ze niet te berekenen.

7. Gegeven zijn de functies $f_a : x \mapsto \frac{\sqrt{4x-a}}{x^2+1}$, met parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) ★ Bepaal het domein van deze functies.

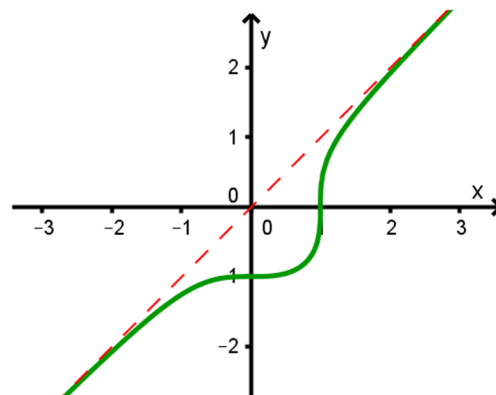
b) ★★ Bepaal voor welke waarde van de parameter a de grafiek een extremum bereikt voor $x = 1$.

• ★ Wat is de ordinaat van dit extremum?

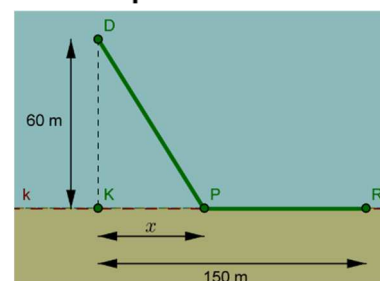
8. Gegeven is grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$, en haar schuine asymptoot $s \leftrightarrow y = x$.

a) ★ Bewijs dat $f''(x) = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(x^3-1)^5}}$.

b) ★★ Bespreek in een samenvattende tabel het volledige verloop (stijgen/dalen, hol/bol) van de functie f .



9. ★★ Een drenkeling (D) bevindt zich op 60 meter van de kust (k). Op 150 meter van het punt K (het punt op de kustlijn dichtst bij D) langs de kustlijn staat een redder (R). De redder kan tegen 2,6 m/s lopen over het strand en tegen 1 m/s naar de drenkeling toe zwemmen. Bepaal algebraïsch het ideale punt waarop de redder moet beginnen zwemmen (dus zodat de tijd die hij nodig heeft om de drenkeling te bereiken minimaal is).



Veel succes!

1.	a) $-1/2$ b) $-11/100$ c) $1/6$ d) $-16/33$ e) 0																				
2.	a) V.A.: $x = 0$ en H.A.: $y = 1$ als $x \rightarrow +\infty$ b) H.A.: $y = -5$ als $x \rightarrow -\infty$ en S.A.: $y = 2x + 1$ als $x \rightarrow +\infty$ c) H.A.: $y = -1$ als $x \rightarrow \pm\infty$																				
3.	De snijpunten zijn $A(-1,1)$ en $B(1,1)$.																				
4.	S.A.: $y = -2ax - \frac{b}{2a}$ als $x \rightarrow -\infty$ en H.A.: $y = \frac{b}{2a}$ als $x \rightarrow +\infty$																				
5.	a) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $(-1,0)$ en $(0,0)$ c) $v \leftrightarrow x = 1$ is een verticale asymptoot $h \leftrightarrow y = -1$ is een horizontale asymptoot $s \leftrightarrow y = 4x + 5$ is een schuine asymptoot																				
6.	a) Voor $x \rightarrow +\infty$ is de asymptoot de rechte met vergelijking $y = 2$, Voor $x \rightarrow -\infty$ is de asymptoot de rechte met vergelijking $y = -2$. b) <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>MAX $(\sqrt{5})$</td><td>$\searrow$</td></tr></table> c) De tweede afgeleide heeft in de teller een tweedegraadsveelterm met positieve discriminant.	x	$-\infty$	2	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	0	$-$	$f(x)$	$\nearrow$	MAX $(\sqrt{5})$	$\searrow$								
x	$-\infty$	2	$+\infty$																		
$f'(x)$	$+$	0	$-$																		
$f(x)$	$\nearrow$	MAX $(\sqrt{5})$	$\searrow$																		
7.	a) $\text{dom } f = \left[\frac{a}{4}, +\infty\right[$ b) Als $a = 2$ is de coördinaat van het extremum $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$																				
8.	a) Je kan wat rekenwerk uitsparen door in te zien dat $\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2} = (x^3 - 1)^{2/3}$ b) <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>BP (-1)</td><td>$\nearrow$</td><td>BP (0)</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$f''(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$f(x)$	$\nearrow$	BP (-1)	$\nearrow$	BP (0)
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$																	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$-$																	
$f(x)$	$\nearrow$	BP (-1)	$\nearrow$	BP (0)																	
9.	De redder zal het snelst bij de drenkeling zijn als hij 125m loopt (dus als $x = 25$).																				